

Институтъ Гражданскихъ Инженеровъ Императора НИКОЛАЯ I.

Л Е К Ц И И
И
ПО
СТАТИКЪ СООРУЖЕНІЙ.

Читанныя проф. гражданскимъ инженеромъ
П. И. ДМИТРИЕВЫМЪ.

**Общіе методы расчета статически
неопредѣлимыхъ системъ.**

Упругія арки.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типо-Литографія И. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.

1912

О Т Д В Л Ъ ІІІ.

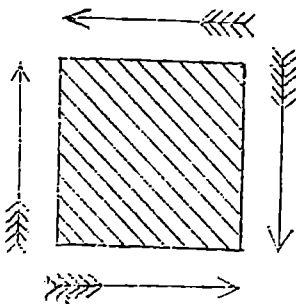
Г л а в а ІІ.

ОБЩІЕ МЕТОДЫ РАЗСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ-НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМЪ.

I | **ОБЩЕННЫЯ СИЛЫ И КООРДИНАТЫ.** Въ механикѣ, особенно въ Динамикѣ, часто пользуются для общихъ выводовъ обобщенными координатами Лагранжа. Ввиду легкости и удобства оперированія при помощи этихъ координатъ применимъ ихъ и въ данномъ случаѣ. Обобщенными координатами называются независимыя переменныя, опредѣляющія положеніе тѣла или любой системы тѣлъ. Смотря по виду, составу и свойствамъ системы, ея обобщенныя координаты принимаютъ различныя, равнообразныя формы. Такъ наприм. для неизмѣняемой системы обобщенными координатами будутъ служить слѣдующія шесть величинъ: три проекціи поступательнаго перемѣщенія на координатныя оси и три

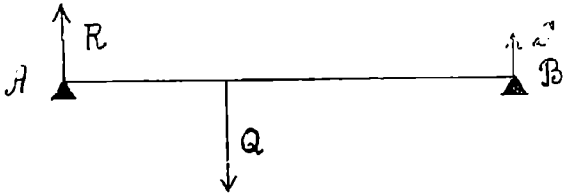
угловыя перемѣненія для вращенія около координатныхъ осей. Эти шесть величинъ вполне опредѣляютъ положеніе и перемѣненіе тѣла, и помощью ихъ движеніе тѣла описывается и изслѣдуется гораздо проще, чѣмъ при посредствѣ Декартовыхъ координатъ. Далѣе, если имѣемъ тѣло, сжимаемое равномерно по всѣмъ направленіямъ, то переменная вполне опредѣляющая состояніе этого тѣла, есть уменьшеніе объема его. Такое уменьшеніе и слѣдуетъ принять за обобщенную координату. Употребленіе обобщенныхъ координатъ необходимо вызываетъ примѣненіе такъ называемыхъ обобщенныхъ силъ; силы часто встрѣчаются группами, связанными между собой. Чаще всего встрѣчается группа, называемая парой силъ. Далѣе безпрестанно встрѣчаются двѣ силы равныя и противоположныя, производящія растяженіе или сжатіе. При явленіи сдвига встрѣчается известная группа изъ 4-хъ силъ, образующихъ совокупность двухъ противоположныхъ паръ [фиг. 1]. Нередко встрѣчается группа, представленная на фиг. 2, состоящая изъ трехъ параллельныхъ силъ Q, R, S ; здѣсь R и S уравновѣшиваютъ силу Q . Весьма распространенъ случай давленія, распределеннаго равномерно по всей поверхности тѣла: эта группа, состоящая изъ

фиг. 1



дѣнная на фиг. 2, состоящая изъ трехъ параллельныхъ силъ Q, R, S ; здѣсь R и S уравновѣживаютъ силу Q . Весьма распространенъ случай давленія, распределеннаго равномерно по всей поверхности тѣла: эта группа, состоящая изъ

фиг. 2.



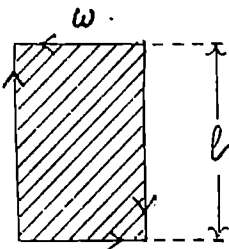
очень большого числа силъ, приложенныхъ на каждомъ элементѣ поверхности.

Подобныя группы будемъ называть обобщенными силами. Въ этомъ случаѣ не нужно разсматривать отдѣльно каждую изъ силъ, составляющихъ группу и не нужно употребить для каждой силы особое обозначеніе. Будемъ разсматривать всю группу сразу, обозначивъ ее одной буквой и будемъ оперировать съ группой, а не съ отдѣльными силами. Это значительно упроститъ рѣшенія.

Для опредѣленія работы силъ для нѣкоторыхъ перемѣщеній нужно обобщенныя силы выбирать такъ, чтобы работа всѣхъ силъ, составляющихъ группу, могла изобразиться однимъ членомъ. Такъ для пары силъ работа ея изобразится произведеніемъ изъ момента пары M на уголъ поворота ея φ , т.е. черезъ $M\varphi$. Для двухъ растягивающихъ силъ P и P работа изобразится произведеніемъ изъ P на удлиненіе Δ , т.е. на увеличеніе разстоянія точекъ, къ которымъ приложены силы; слѣдовательно работа равна $P \cdot \Delta$.

Для случая сдвига [фиг. 3], назовемъ черезъ p величину силы, приходящейся на единицу площади ω , къ которой она приложена, а черезъ l длину тѣла. Если

Фиг. 3



уголъ перекланиванія будетъ γ ,
то работа всѣхъ четырехъ дѣйстви-
ющихъ силъ представится черезъ:
 $p \cdot \omega \cdot l \cdot \gamma$ или $p \cdot \gamma \cdot W$, гдѣ W -
объемъ тѣла.

Въ случаѣ давленія распре-
дѣленнаго равномерно по всей по-
верхности тѣла, и составляющаго q килог. на единицу
площади, получимъ работу всѣхъ силъ, составляющихъ
группу равной $q \cdot W$, гдѣ W - измѣненіе объема тѣла.
Такимъ образомъ для каждой обобщенной силы получается
только одинъ членъ въ выраженіи работы.

2 | СООТВѢТСТВІЕ МЕЖДУ СИЛАМИ И КООРДИНАТАМИ. Груп-
па внѣшнихъ силъ, которая будутъ приняты за одну обоб-
щенную силу, должны быть подбираемы сообразно съ при-
нятыми обобщенными координатами, опредѣляющими положе-
ніе нашего тѣла или системы.

А именно: пусть обобщенныя координаты, т.е. неза-
висимыя переменныя, опредѣляющія положеніе или состоя-
ніе тѣла, будутъ:

$$q, \psi, \vartheta, \dots \dots \dots$$

Тогда нужно взять такое же число обобщенныхъ силъ
 $\Phi, \Psi, \Theta, \dots \dots \dots$ подобравши ихъ такъ, чтобы при без-
конечно малыхъ измѣненіяхъ координатъ $\delta q, \delta \psi, \delta \vartheta, \dots$
возможная работа всѣхъ внѣшнихъ силъ изобразилась сум-

мой:

$$\Phi \delta x + \Psi \delta y + \Theta \delta z + \dots$$

Такимъ образомъ для каждой координаты имѣется своя, ей соответствующая сила. Иногда означаютъ такое соответствие говоря, что сила и координата относятся къ одному и тому же типу. Всѣ приложенныя къ тѣлу внѣшнія силы должны быть распределены или разложены на эти группы.

Приведенные выше примѣры показываютъ, что различныя обобщенныя силы могутъ быть неоднородны одна другой; тогда и соответствующія имъ координаты также неоднородны, но произведенія каждой силы на соответствующія имъ координаты или на измѣненія этихъ координатъ, т.е. члены $\Phi \delta x$, $\Psi \delta y$, необходимо должны быть всѣ одинаковаго измѣренія. Такъ, на примѣрахъ, мы имѣли, что обобщенная сила представляется иногда моментомъ пары M , иногда двумя силами $|P$ и $-P$, иногда давленіемъ q - приходящимся на единицу поверхности. Это все величины неоднородныя между собой. Соответственные координаты для этихъ случаевъ будутъ:

уголъ поворота φ - отвлеченное число,

удлиненіе Δ - величина линейная,

измѣненіе объема W - величина третьяго измѣренія

Но произведенія силъ на соответствующія имъ перемѣщенія, $M\varphi$, $P\Delta$, qW - всѣ однородны между собой.

За координаты, опредѣляющія положеніе или состояніе упругой системы, можно будетъ принимать иногда перемѣщеніе точекъ ея [точнѣе говоря, провѣцій этихъ перемѣщеній на различныя направленія], иногда же измѣненія формы ея частей - удлинненіе, сдвигъ, изгибъ и т.п. Всѣ эти координаты будемъ отсчитывать отъ начальнаго, естественнаго состоянія системы, т.е. отъ такого состоянія ея, когда она вовсе не подвержена дѣйствию нагрузокъ.

3 | ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГІЯ. Не только упругія тѣла, но и разныя другія тѣла и системы владѣютъ свойствомъ при измѣненіи формы накапливать въ себѣ потенциальную энергію, которая потомъ можетъ быть использована. Для упругихъ тѣлъ такое свойство ихъ выражается въ общежитіи словомъ пружинность. Потенциальная энергія при измѣненіи формы вызывается работой тѣлъ внѣшнихъ силъ, которыя измѣняютъ форму и представляетъ собою какъ бы накопленную, запасенную работу внѣшнихъ силъ. Чтобы вся работа нагрузокъ могла превратиться въ потенциальную энергію деформируемаго тѣла, необходимо слѣдующее условіе: нагрузки должны быть во все время деформации только какъ разъ достаточны для уравновѣшенія внутреннихъ силъ, но не болѣе того. Избытокъ нагрузокъ вызоветъ то, что часть ихъ работы преобразуется въ кинетическую энергію и тогда произведенная работа внѣшнихъ силъ не будетъ служить мѣрой накопленной потенциаль -

ной энергіи. И такъ, если желаемъ измѣрить потенціальную энергію посредствомъ работы внѣшнихъ силъ, произво-водящихъ деформацію, то нужно назначить для этихъ силъ такія, постепенно измѣняющіяся величины, которыя для каждаго мгновенія были бы какъ разъ достаточны для уравновѣшенія внутреннихъ напряженій. Накопленная потенціальная энергія зависитъ отъ получившагося оконча-тельно измѣненія формы и вполнѣ опредѣляется этимъ из-мѣненіемъ, т.е. не зависитъ отъ пути, по которому про-исходило измѣненіе. Другими словами, она есть совер-шенно опредѣленная функція тѣхъ координатъ, которыя опредѣляютъ состояніе тѣла, какъ бы ни мѣнялась форма тѣла, но, если при концѣ нашего наблюденія она такая же, какъ въ началѣ его, то окончательная потенціальная энергія одинакова съ начальной. Форма или видъ такой функціи можетъ быть разнообразная; она опредѣляется свойствомъ тѣла. Но для упругихъ, твердыхъ тѣлъ можно показать, что ихъ потенціальная энергія всегда долж-на имѣть слѣдующую опредѣленную форму: она есть одно-родная функція второй степени отъ координатъ опредѣля-ющихъ состояніе тѣла. Справедливость этого положенія указывается слѣдующимъ простымъ соображеніемъ: потен-ціальная энергія представляетъ работу упругихъ силъ и опредѣляется произведеніемъ этихъ силъ на перемѣщенія или на измѣненія формъ. Но самыя упругія силы пропор-ціональны этимъ перемѣщеніямъ или измѣненіямъ. Поэтому

работа ихъ представится однородной функцией второй степени отъ означенныхъ измѣненій, т.е. отъ координатъ, опредѣляющихъ состояніе тѣла. Называя эти координаты въ общемъ случаѣ черезъ: $\varphi, \psi, \mathcal{J}, \dots$ получимъ общее выраженіе для потенциальной энергіи въ формѣ:

$$1 \left\{ \begin{aligned} V &= a\varphi^2 + b\psi^2 + c\mathcal{J}^2 + \dots + \\ &+ a'\varphi\psi + b'\varphi\mathcal{J} + c'\psi\mathcal{J} + \dots \end{aligned} \right.$$

Здѣсь $a, b, c \dots$ } постоянные коэффициенты, зави-
 $a', b', c' \dots$ } сязіе отъ упругихъ свойствъ
тѣла.

Высказанное выше положеніе о видѣ функций, представляющей потенциальную энергію, можетъ служить общимъ опредѣленіемъ всѣхъ упругихъ тѣлъ, общимъ свойствомъ ихъ и даетъ возможность говорить сразу о всѣхъ упругихъ тѣлахъ и дѣлать выводы, применимые ко всѣмъ имъ.

4 | ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ВНЕШНИМИ СИЛАМИ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГІЕЙ. Пусть координаты, т.е. независимыя переменныя, опредѣляющія состояніе тѣла будутъ: $\varphi, \psi, \mathcal{J}, \dots$. Величины координатъ будемъ считать отъ естественнаго, ненапряженнаго состоянія тѣла, когда къ нему вовсе не приложены внѣшнія силы; при отсутствіи нагрузокъ всѣ координаты равны нулю. Напряженное состояніе тѣла характеризуется величинами, указанными въ



ше, координатъ. Внѣшнія |обобщенныя| силы, уравновѣ-
 жающія взятое нами напряженное состояніе, означимъ тѣ-
 ми же буквами, какъ и соответствующія имъ координаты,
 но для нихъ примѣнимъ крупный шрифтъ:

$$\Phi, \Psi, \Theta.$$

Число силъ одинаково съ числомъ координатъ; сила
 и координата взаимносоответствующія |относящіяся къ
 одному и тому же типу| означены одной и той же буквой
 алфавита, т.е. другими словами элементарная работа
 внѣшнихъ силъ при измѣненіи координатъ на: $d\varphi, d\psi,$
 $d\theta$ изображается многочленомъ:

$$\Phi \cdot d\varphi + \Psi \cdot d\psi + \Theta \cdot d\theta + \dots$$

Потенціальная энергія нашего тѣла можетъ быть раз-
 сматриваема, какъ накопленная изъ отдѣльныхъ элементар-
 ныхъ работъ внѣшнихъ нагрузокъ, уравновѣливающихъ на-
 приженіе. Такъ какъ наше тѣло находится въ равновѣсіи,
 то къ нему можно примѣнить начало возможныхъ перемѣ-
 щеній, т.е. общій законъ равновѣсія, примѣнимый для
 всѣхъ тѣлъ и системъ. Напишемъ, что сумма работъ силъ,
 внѣшнихъ и внутреннихъ, для безконечно малаго возмож-
 наго перемѣщенія равна нулю. Это перемѣщеніе представ-
 ляется приращеніями координатъ: $d\varphi, d\psi, d\theta, \dots$
 Работа внѣшнихъ силъ для него выражается многочленомъ:

$\Phi dy + \Psi d\psi + \Theta d\theta + \dots$. Что касается до работы внутренних силъ, то она можетъ быть выражена, если известна потенциальная энергія V въ функціи отъ координатъ. Эта энергія представляетъ собою запасенную работу, которая въ случаѣ нужды можетъ быть возвращена при восстановленіи формы тѣла, и такое возвращеніе работы производится внутренними силами. Онѣ при постепенномъ восстановленіи формы будутъ мало по малу отдавать запасенную потенциальную энергію, т.е. будутъ повторять въ обратномъ порядкѣ то, что происходило въ прямомъ при деформации.

Назовемъ черезъ δV то приращеніе потенциальной энергіи, которое получается при увеличеніи координатъ на $dy, d\psi, d\theta, \dots$. При восстановленіи формы, т.е. когда координаты опять уменьшатся на $dy, d\psi, d\theta, \dots$ и вернутся къ прежнимъ своимъ величинамъ

$$y, \psi, \theta, \dots$$

внутреннія силы возстансвятъ изъ накопленной потенциальной энергіи величину ея δV . Отсюда видимъ, что обратно при увеличеніи координатъ отъ y, ψ, θ, \dots на $dy, d\psi, d\theta, \dots$ внутреннія силы производятъ работу, численно равную δV , но отличающуюся отъ нея знакомъ. Окладывая работы внѣшнихъ и внутреннихъ силъ и уравновѣшивая сумму нулю, получимъ:

$$\Phi dy + \Psi d\psi + \Theta d\theta + \dots - \delta V = 0 \quad |2|$$

Но потенциальная энергия есть функция независимых переменных

$$y, \varphi, \mathcal{I}, \dots$$

и поэтому приращение ее представляется, помощью производных этой функции, выражением:

$$\delta V = \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{d\varphi} d\varphi + \frac{dV}{d\mathcal{I}} d\mathcal{I} + \dots$$

Вставляя это выражение в уравнение |2| и собирая в одно члены с общими множителями, получим:

$$\left(\Phi - \frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\Psi - \frac{dV}{d\varphi}\right) d\varphi + \left(\Omega - \frac{dV}{d\mathcal{I}}\right) d\mathcal{I} + \dots = 0$$

Но y, φ, \mathcal{I} - независимы переменные, следовательно их приращения $dy, d\varphi, d\mathcal{I}, \dots$ совершенно друг от друга независимы и могут получать, каждое отдельно, любую назначенную нами величину, напр. 0. Поэтому в предыдущем равенстве коэффициенты у приращений $dy, d\varphi, d\mathcal{I}, \dots$ должны быть, каждый порознь равны нулю. Получим:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{dV}{dy} \\ \Psi &= \frac{dV}{d\varphi} \\ \Omega &= \frac{dV}{d\mathcal{I}} \end{aligned} \right\} |3|$$

т.е. имѣемъ слѣдующую общую теорему: внѣшнія силы и выражаются производными отъ потенциальной энергии по соответствующимъ координатамъ. Замѣтимъ, что при выводѣ этой теоремы не дѣлалось никакихъ предположеній относительно формы функции V . Слѣдовательно эта теорема общая справедливая для всѣхъ случаевъ, когда внутреннія силы имѣютъ потенциалъ, т.е. когда для нихъ можно составить выраженіе потенциальной энергии, зависящее только отъ координатъ, опредѣляющихъ состояніе тѣла. Теорема эта давно извѣстна и ведетъ свое начало отъ Лагранжа.

5 | **ОБОВЩЕННЫЙ ЗАКОНЪ ГУКА.** Только что указанная теорема представляетъ единственный общій, независимый отъ формы функции V , законъ. Всѣ дальнѣйшіе выводы относятся исключительно къ упругимъ твердымъ тѣламъ, къ которымъ теперь и возвратимся. Для характеристики упругихъ тѣлъ лучше всего взять общую теорему о сложномъ сопротивленіи. По этой теоремѣ дѣйствія отдѣльныхъ нагрузокъ складываются, если эти силы приложены одновременно. Законъ Гука получается какъ частный случай этой теоремы; по закону Гука всякое перемѣщеніе или измѣненіе формы пропорціонально той нагрузкѣ, которая его вызываетъ. Выразимъ эту теорему алгебраически. На основаніи ея наши перемѣщенія

$\varphi, \psi, \zeta, \dots$

представятся линейными функциями отъ нагрузокъ. Напри-
мѣръ для перемѣщенія φ должны имѣть зависимость

$$\varphi = a_1 \Phi + b_1 \Psi + c_1 \Theta + \dots \dots \dots |4|$$

Здѣсь отдѣльные члены указываютъ дѣйствія отдѣльныхъ
нагрузокъ, складывающіяся согласно теоремѣ о сложномъ
сопротивленіи. Дѣйствіе каждой отдѣльной нагрузки пред-
ставляется членомъ, который пропорціоналенъ этой на-
грузкѣ. Коэффициенты пропорціональности a_1, b_1, c_1, \dots
зависятъ отъ формы, размѣровъ тѣла и его упругихъ
свойствъ. Такія же зависимости должны существовать и
для другихъ координатъ, т.е.

$$\psi = a_2 \Phi + b_2 \Psi + c_2 \Theta + \dots \dots \dots |4|$$

$$\mathcal{J} = a_3 \Phi + b_3 \Psi + c_3 \Theta + \dots \dots \dots |4|$$

Совокупность выраженій |4| представляетъ такъ называ-
емый обобщенный законъ Гука: каждая координата есть ли-
нейная функція отъ нагрузокъ. Всѣ явленія упругости бу-
дутъ только частные случаи этого закона. Выраженія |4|
можно рассматривать какъ уравненія между неизвѣстными
величинами $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$. Эти уравненія первой
степени, число ихъ равно числу неизвѣстныхъ, слѣдова-
тельно неизвѣстныя могутъ быть опредѣлены элементарны-

ми приёмами исключения. Результатом этого исключения получатся внѣшнія силы: $\Phi, \Psi, \Theta, \dots$, выраженные функциями отъ координатъ $\varphi, \psi, \vartheta, \dots$. Очевидно всѣ эти функции будутъ первой степени отъ координатъ, такъ какъ при исключеніи не придется ни возвышать въ степени, ни умножать на координаты; исключеніе будетъ состоять только въ умноженіи на постоянные коэффициенты и въ сложеніи или вычитаніи. Поэтому въ результатѣ исключенія наши силы выразятся въ такой формѣ:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= A\varphi + B\psi + C\vartheta + \dots \\ \Psi &= A'\varphi + B'\psi + C'\vartheta + \dots \\ \Theta &= A''\varphi + B''\psi + C''\vartheta + \dots \end{aligned} \right\} |5|$$

гдѣ A, B, C, \dots нѣкоторые новые коэффициенты. И такъ: внѣшнія силы выражаются линейными функциями отъ координатъ, т.е. отъ перемѣшеній или измѣненій формы. Такимъ образомъ намъ придется далѣе оперировать съ весьма простыми функциями. Потенціальная энергія, какъ доказано ранѣе, есть функция второго порядка, а внѣшнія силы — функциямъ перваго порядка относительно координатъ. Это опредѣляетъ особую простоту выводовъ и приемовъ доказательства.

6 | ТЕОРЕМА КЛАПЕЙРОНА. Такъ какъ потенциальная энергія упругихъ тѣлъ есть однородная функція переменныхъ, то къ ней можно примѣнить известную теорему Эйлера объ однородныхъ функціяхъ. То есть: если составить полный дифференціалъ этой функціи и въ немъ, вмѣсто дифференціаловъ переменныхъ, поставить самия переменныя, то въ результатѣ получится первоначальная функція, умноженная на степень однородности ея.

Въ нашемъ случаѣ этотъ множитель будетъ два и для потенциальной функціи \mathcal{V} получимъ:

$$\frac{d\mathcal{V}}{dx}x + \frac{d\mathcal{V}}{dy}y + \frac{d\mathcal{V}}{dz}z + \dots = 2\mathcal{V}$$

Но по уравненію 3 имѣемъ, что $\frac{d\mathcal{V}}{dx} = \Phi$, $\frac{d\mathcal{V}}{dy} = \Psi$ и $\frac{d\mathcal{V}}{dz} = \Theta$

Слѣдовательно, вставляя сими вмѣсто производныхъ въ предыдущее уравненіе, получимъ:

$$\Phi \cdot x + \Psi \cdot y + \Theta \cdot z + \dots = 2\mathcal{V} \quad |6|$$

Это уравненіе въ нѣмецкихъ сочиненіяхъ называется теоремою Клапейрона. Оно выражаетъ собой тотъ общій законъ, что всегда потенциальная энергія вдвое меньше, чѣмъ работа внѣшнихъ силъ, соответствующая положенію равновѣсія.

Отсюда можно вывести такое следствие. Пусть нѣкоторыя внѣшнія силы будутъ сразу | мгновенно | приложены къ упругой системѣ въ ея естественномъ состояніи. Доходя до положенія, съ которыми онѣ уравниваются съ внутренними силами, эти нагрузки произведутъ работу вдвое большую, чѣмъ накопившаяся внутренняя энергія. Следовательно упругое тѣло не остановится въ этомъ положеніи, а движеніе его будетъ продолжаться пока перемѣщенія получатъ величины

$$2\varphi, 2\psi, 2\zeta$$

Только тогда скорость частицъ системы обратится въ нуль. Затѣмъ начнутся колебанія, которыя постепенно погасаютъ дѣйствіемъ различныхъ сопротивленій. Наконецъ система придетъ въ покой, въ положеніе равновѣсія.

7 | ИЗМѢНЕНІЕ НЕЗАВИСИМЫХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ. Часто приходится замѣнять всѣ прежнія переменныя, или часть ихъ, новыми, связанными съ первыми линейной зависимостью. Понятно, что при этомъ потенциальная энергія будетъ по прежнему функцией второй степени относительно координатъ; внѣшнія силы, также какъ и прежде, будутъ функциями первой степени отъ координатъ. Перемена координатъ влечетъ за собою измѣненіе типа силъ. Последнія должны быть подобраны такъ, чтобы соответствовали принятымъ новымъ координатамъ. При такомъ линейномъ преобразованіи координатъ силы новыхъ типовъ ~~связаны~~ съ прежнему

Силами, связанными съ прежнему

ми силами тоже линейными зависимостями, т.е., если при линейномъ преобразованіи, прежнія координаты связаны съ новыми посредствомъ формулъ:

$$\varphi = A\varphi_1 + B\psi_1 + C\varrho_1$$

$$\psi = A'\varphi_1 + B'\psi_1 + C'\varrho_1$$

$$\varrho = A''\varphi_1 + B''\psi_1 + C''\varrho_1$$

то величины новыхъ силъ Φ_1 , Ψ_1 , Θ_1 полу-
чатся въ такомъ видѣ:

$$\Phi_1 = A\Phi + A'\Psi + A''\Theta + \dots$$

$$\Psi_1 = B\Phi + B'\Psi + B''\Theta + \dots$$

$$\Theta_1 = C\Phi + C'\Psi + C''\Theta + \dots$$

При такомъ линейномъ преобразованіи всегда можно такъ подобрать коэффициенты A, B, C, A', \dots что въ выраженіи для потенциальной энергіи обратятся въ нуль коэффициенты у всѣхъ членовъ съ произведеніями координатъ; останутся только члены съ квадратами координатъ, т.е. $V = a\varphi^2 + b\psi^2 + c\varrho^2 \dots$ |6|. Та-
кія координаты называются главными. Они дають самое

простое выражение для потенциальной энергии.

8 | ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ УПРУГИХ ТѢЛЪ. Сначала напомнимъ выражения этой энергии для простѣйшихъ случаевъ, известныхъ изъ курса сопротивленія материаловъ, а потомъ перейдемъ къ другимъ случаямъ.

а | Растяжение и сжатіе. Разсмотримъ потенциальную энергию упругаго бруска, которая накапливается въ немъ, когда будемъ растягивать его отъ естественнаго состоянія до получения удлиненія l . Вообразимъ себѣ одно изъ промежуточныхъ состояній нашего бруска, когда онъ имѣетъ удлиненіе γ . Для уравновѣшенія внутреннихъ силъ въ этомъ состояніи нужно приложить къ бруску вѣдную растягивающую силу, величина которой должна быть

$$N = E \cdot \omega \cdot \frac{\gamma}{L}$$

гдѣ: E - коэф. упругости

ω - площадь сѣченія

L - длина бруска.

Такъ какъ вѣдная сила уравновѣшиваетъ внутреннія, то сумма работъ и вѣщихъ силъ для безконечно малаго возможнаго перемѣщенія должна быть равна, нулю. Для нашего упругаго тѣла такимъ возможнымъ перемѣщеніемъ служитъ безконечно малое увеличеніе удлиненія dy . Следовательно при увеличеніи удлиненія на dy , сумма работъ внутреннихъ силъ и вѣдной силы N равна нулю. Дру

гими словами работа внутренних сил численно равна, а по знаку противоположна работѣ вѣшной силы, т.е. величинѣ $N \cdot dy$ или

$$N \cdot dy = \varepsilon \omega \frac{y}{L} \cdot dy$$

Последнее выраженіе даетъ величину потенциальной энергіи накопившейся въ брускѣ при удлиненіи dy . Полная потенциальная энергія получится какъ сумма такихъ элементарныхъ выраженій, т.е.

$$V = \int_0^l \varepsilon \frac{y}{L} \cdot dy = \varepsilon \omega \frac{l^2}{2L} \dots |7|$$

Замѣтимъ здѣсь, что въ выраженіи потенциальной энергіи для рассматриваемаго случая не входятъ произведенія координатъ, слѣдовательно выбранныя нами, координаты |удлиненія бруска| - главныя. Выразимъ потенциальную энергію въ другой формѣ, въ функціи силъ. Известно, что

$$N = \frac{\varepsilon \omega l}{L} \quad \text{и} \quad l = \frac{N \cdot L}{\varepsilon \cdot \omega}$$

подставляя значеніе l въ урав. 7 получимъ:

$$\left. \begin{array}{l} \text{или} \\ V = \frac{1}{2} N \cdot l \\ V = \frac{N^2 L}{2 \cdot \varepsilon \cdot \omega} \end{array} \right\} \dots |8|$$

Последняя формула часто применяется для разнообразных ферм. Положим имѣемъ ферму для которой можно допустить, что всѣ части ея только растягиваются или сжимаются и изгибъ вполне устраненъ. Тогда полная потенциальная энергія всей фермы представится суммой членовъ такого вида какъ |8|. Каждый брусокъ фермы доставитъ одинъ членъ этой суммы.

Возвращаясь теперь къ формуламъ |7| и |8|, мы видимъ, что потенциальная энергія вполне опредѣляется или величиной окончательнаго удлиненія ℓ , или величиной силы N , причемъ обѣ эти величины входятъ въ выраженіе энергіи во второй степени.

Если бы мы представили теперь себѣ, что грузъ N будетъ приложенъ сразу къ бруску, то на протяженіи удлиненія ℓ грузъ совершилъ бы работу $N \cdot \ell$ т.е. вдвое большую, чѣмъ потенциальная энергія $|\frac{1}{2} N \cdot \ell|$, соответствующая удлинению стержня ℓ . Избытокъ работы обратился бы въ кинетическую энергію движущаго тѣла. Описанное явленіе нагляднѣе всего представить графически |фиг. 4|.

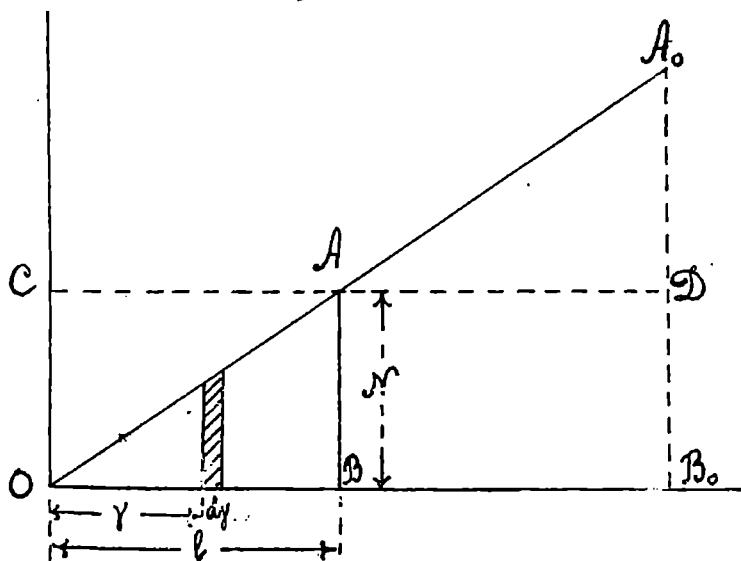
Если по оси абсциссъ отложить удлиненія γ , а соответствующія значенія растягивающей силы отложить по оси ординатъ, то діаграмма представится наклонной прямой OA . Элементарная работа $|N \cdot d\gamma|$ представится заштрихованнымъ на фиг. 4 элементарнымъ прямоугольникомъ. Полная работа растягивающей силы N , равная

потенціальної енергії розтягнутого бруска, представиться площею

$$\Delta AOB = \frac{1}{2} N \cdot l$$

Если теперь сила не возрастает постепенно от нуля и до конечного своего значения, а приложена к растягиваемому стержню сразу, то на удлинении l она произведет работу $N \cdot l$, изображенную на фиг. 4 прямоугольником AOB . Так как энергия, накопленная в растянутом брусе составляет только половину работы, произведенной силой N , то удлинению l не будет соответствовать равновесие; удлинение будет возрастать, пока работа внешней силы N не сравняется с энергией, накопленной в растянутом брусе. Пусть этому моменту на фиг. 4 соответствует точка A_0 . Тогда энергия, накопленная в брусе, определяется площадью OA_0B_0 , работа внешней силы площадью $OCDA_0$. Из сравнения этих площадей находим:

Фиг. 4.



Следовательно

$$OB = B_0B_0$$

Следовательно

то окончательное удлинение при внезапном приложе -

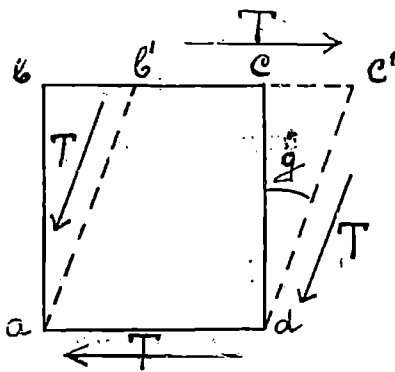
ніи внішней сили будетъ

$$OB_0 = 2 \cdot OB = 2l$$

т.е. вдвое больше чѣмъ при постепенномъ возрастаніи нагрузки.

б | Сдвигъ. Выраженіе потенциальной энергии при сдвигѣ можетъ быть получено совершенно тѣмъ же путемъ, что и при растяженіи. Если обозначить уголъ окончатель

фиг. 5.



наго сдвига черезъ g , коэффициентъ упругости при сдвигѣ черезъ G , а соответствующую сдвигающую силу черезъ T , то, при площади верхняго и нижняго оснований бруса $abcd$ |фиг. 4|, равной ω и высотѣ его

равной l , получимъ:

$$V = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \omega \cdot l \cdot g^2$$

или, полагая

$$T = \omega \cdot G \cdot g$$

$$V = \frac{1}{2} \frac{T^2 \cdot l}{\omega \cdot G}$$

... |9|

в | Скручиваніе. Разсмотримъ теперь скручиваніе

круглого стержня парой силъ, приложенныхъ на концѣ. Пусть α - окончательное значеніе угла закручиванія. Предположимъ, что скручивающая пара возрастаетъ такимъ образомъ, что въ каждый моментъ внѣшнія и внутреннія силы находятся въ равновѣсїи. Возьмемъ положеніе, соотвѣтствующее углу закручиванія β ; скручивающій моментъ для этого положенія будетъ:

$$M_0 = \frac{\beta \cdot G \cdot J_0}{l}$$

гдѣ G - модуль или коэффициентъ упругости при сдвигѣ, а J_0 - полярный моментъ инерціи поперечнаго сѣченія. Если теперь углу закручиванія дать безконечно малое приращеніе $d\beta$, то скручивающая пара совершитъ при этомъ элементарную работу:

$$M_0 \cdot d\beta = \frac{G \cdot J_0 \cdot \beta \cdot d\beta}{l}$$

Означенная работа очевидно превратится въ потенциальную энергію скручивающаго стержня. Полная потенциальная энергія, соответствующая углу закручиванія α , получится какъ сумма элементарныхъ энергій т.е.

$$V = \int_0^\alpha \frac{G \cdot J_0 \cdot \beta \cdot d\beta}{l} = \frac{G \cdot J_0 \cdot \alpha^2}{2 \cdot l} \dots\dots\dots |10|$$

Энергія представилась опять функцией второй степени отъ

угла закручивания α . Если въ выраженіи |10| подста-
вить окончательное значеніе скручивающей пары:

$$M = \frac{G \cdot J \cdot \alpha}{l}$$

то получимъ

$$\gamma = \frac{M \cdot \alpha}{l} \dots \dots \dots |106|$$

Результатъ аналогичный выраженію |8|

г) Изгибъ. Ограничимся случаемъ изгиба около од-
ной изъ главныхъ осей, сначала рассмотримъ изгибъ од-
нородный, т.е. совершенно одинаковый по всей длинѣ тѣ-
ла. Это будетъ круговой изгибъ, при которомъ попереч-
ныя сѣченія не искривляются и сдвига не происходитъ.
Для полученія такого изгиба къ бруску должна быть при-
ложена, въ плоскости изгиба, пара силъ, мѣрой величи-
ны которой будетъ служить ее моментъ M . Дуга круга,
по которой изогнется ось бруска будетъ имѣть радіусъ

$$\rho = \frac{E \cdot J}{M}$$

гдѣ J - моментъ инерціи поперечнаго сѣченія. Если пер-
воначальная длина бруска была L , то центральный уголъ
 φ той дуги круга, по которой произойдетъ изгибъ, най-
дется изъ формулы:

$$\rho \varphi = L$$

т.е.

$$\varphi = \frac{M \cdot L}{E \cdot J}$$

Этот угол измеряет относительный поворот двух поперечных сечений, приходящихся на концах бруска. Он представляет собой обобщенную координату, отвечающую силе M . При изменении угла на величину $d\varphi$, работа силы будет $M \cdot d\varphi$. Полная работа внутренних сил при изгибе от естественного состоянія бруска, когда он прямой; до изгиба на угол φ , изобразится суммой элементарных работ:

$$\int_0^\varphi M \cdot d\varphi = \int_0^\varphi \frac{E \cdot J}{L} \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \frac{E \cdot J}{L} \varphi^2$$

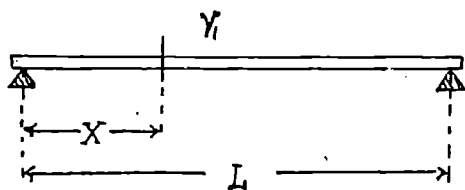
Опять энергия выражается функцией второй степени от угла поворота. Если вместо угла φ вставить соответствующий ему изгибающий момент, то получим:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{E \cdot J} \cdot L \dots\dots\dots [11]$$

Неоднородный [некруговой изгиб]. В этом случае получают сдвиги, сопровождаемые касательными внутренними силами. Для упрощения мы пренебрежем пока работой этих сил, что можно сделать без большой ошибки,

такъ какъ касательныя силы обыкновенно очень малы по сравненію съ растягивающими и сжимающими силами, образующими изгибающую пару. Тогда, для вычисленія работы внутреннихъ силъ можно воспользоваться предыдущей формулой. Но такъ какъ теперь изгибъ не круговой, то радиусъ ρ и моментъ изгиба M мѣняется по длинѣ бруска. Поэтому означенную формулу слѣдуетъ применять не ко всему бруску сразу, а отдѣльно къ каждому безконечно малому элементу бруска, имѣющему длину dx . Подразумѣвая теперь подъ буквой M ту величину момента изгиба,

фиг. 6.



которая соответствуетъ координатѣ x , |фиг.6| получимъ работу внутреннихъ силъ для элементарной части его:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{E \cdot J} dx$$

Работа для всего бруска, имѣющаго длину L , получится суммированиемъ элементарныхъ работъ и будетъ

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{E \cdot J} dx \dots\dots\dots |12|$$

Если работой касательныхъ |сдвигающихъ| силъ нельзя пренебречь, то къ полученному только что выраженію на-

до присоединить еще один член, который может быть получен непосредственно из выводов пункта δ . При этом необходимо иметь в виду, что при вращении одного сечения относительно другого сдвигающая сила не производит никакой работы, потому что при этом путь точек приложения сил перпендикулярен к направлению сдвигающих сил; наоборот, при сдвиге одного сечения относительно другого движение происходит перпендикулярно к нормальному и, следовательно, работу производят лишь напряжения сдвигающие. Таким образом, вся работа деформации для элемента балки получится путем простого сложения двух членов, из которых первый будет относиться к вращению и нормальным силам, а второй - к сдвигу и сдвигающим силам, т.е. получим:

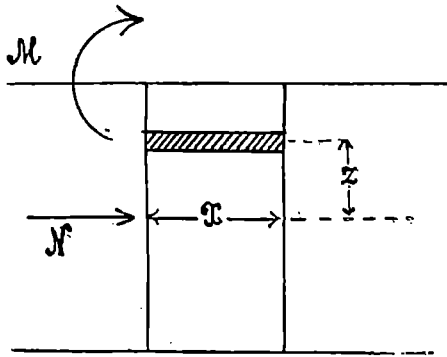
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2 dx}{E \cdot J} + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2 dx}{G \cdot \omega} \dots\dots\dots 126$$

Необходимо заметить, что в числителе второго члена часто вводят еще коэффициент K , зависящий от формы сечения. Ввиду того, что второй член в выражении потенциальной энергии вообще играет незначительную роль и при расчетах им обыкновенно пренебрегают, мы и пренебрегли влиянием коэффициента K .

д | Сложное сопротивление растяжению и изгибу. Пусть

N будетъ растягивающая сила, M - моментъ изгиба, ω - площадь поперечнаго сѣченія, J - моментъ инерціи его.

фиг. 7.



Волокно, длиною dx , находящееся на разстояніи z отъ средней продольной плоскости бруска

(фиг. 7), подвергается растяженію силой на единицу площади:

$$\frac{N}{\omega} + \frac{M \cdot z}{J}$$

Слѣдовательно, его потенциальная энергія будетъ [согл. фор. 8]

Слѣдовательно, его потенциальная энергія будетъ [согл. фор. 8]

$$\left(\frac{N}{\omega} + \frac{M \cdot z}{J} \right)^2 \cdot \frac{\omega^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot \omega_0} dx = \left(\frac{N}{\omega} + \frac{M \cdot z}{J} \right)^2 \cdot \frac{\omega_0}{2 \cdot \varepsilon} dx$$

- гдѣ ω_0 - сѣченіе волокна.

Просуммируемъ потенциальную энергію волоконъ, лежащихъ въ слоѣ, котораго толщина равна dx . Результатъ будетъ:

$$\begin{aligned} dV &= \sum \left(\frac{N}{\omega} + \frac{M \cdot z}{J} \right)^2 \cdot \frac{\omega_0}{2 \cdot \varepsilon} \cdot dx = \\ &= \sum \left(\frac{N}{\omega} \right)^2 \frac{\omega_0}{2 \cdot \varepsilon} \cdot dx + \sum \left(\frac{M \cdot z}{J} \right)^2 \frac{\omega_0}{2 \cdot \varepsilon} dx + 2 \sum \frac{N}{\omega} \cdot \frac{M \cdot z}{J} \cdot \frac{\omega_0}{2 \cdot \varepsilon} dx \end{aligned}$$

Внося общіе множители за знак суммы, найдемъ:

$$dV = \left(\frac{N}{\omega}\right)^2 \frac{dx}{2\varepsilon} \sum \omega_0 + \frac{M^2}{\gamma^2} \cdot \frac{dx}{2\varepsilon} \sum \omega_0 z^2 + \frac{N}{\omega} \cdot \frac{M}{\gamma} \cdot \frac{dx}{\varepsilon} \sum z \cdot \omega_0$$

Входяція сюда суммы имѣютъ слѣдующія значенія:

$$\sum \omega_0 = \omega; \quad \sum \omega_0 z^2 = \gamma; \quad \sum \omega_0 z = 0$$

Слѣдовательно

$$dV = \frac{N^2}{2 \cdot \varepsilon \omega} dx + \frac{M^2}{2 \cdot \varepsilon \gamma} dx \dots \dots |13|$$

Эта формула показываетъ, что потенциальная энергія, въ случаѣ растяженія вмѣстѣ съ изгибомъ, равна суммѣ потенциальныхъ энергій, получающихся для каждаго изъ этихъ простыхъ сопротивленій отдѣльно. Замѣтимъ, что этотъ результатъ получился вслѣдствіе уничтоженія третьяго члена выше приведеннаго выраженія. Вообще же потенциальная энергія въ случаѣ сложнаго сопротивленія не равна суммѣ потенциальныхъ энергій, вычисленныхъ для тѣхъ простыхъ сопротивленій, изъ которыхъ слагается сложное. Полученное выраженіе |13| даетъ V для эле

мента длины ds . Полная величина потенциальной энергии получится интегрированиемъ этого выражения.

е | Изгибъ кривыхъ стержней. Переходя къ опредѣленію потенциальной энергии стержней или брусковъ съ кривою осью, будемъ разсматривать только плоскіе кривые стержни, ось которыхъ заключаетъ въ своей плоскости всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія на стержень и одну изъ главныхъ осей инерціи каждаго поперечнаго сѣченія. Если теперь предположить, что кривизна брусковъ незначительна [бруска малой кривизны], то для опредѣленія нормальныхъ напряженій любой точки сѣченія бруса можно будетъ пользоваться уже извѣстной формулой:

$$n = \frac{N}{\omega} + \frac{M \cdot z}{J}$$

гдѣ N - нормальная осевая сила, M - изгибающій моментъ, а J - моментъ инерціи - отнесенные къ разсматриваемому сѣченію [фиг. 8 стр. 31]. Сдвигающими силами, подобно тому, какъ это дѣлалось для изгиба прямыхъ стержней сначала пренебрегаемъ.

Выдѣлимъ теперь изъ криволинейнаго стержня безконечно тонкій клинъ, длиной по срединной линіи ds [фиг. 8] и разсмотримъ въ немъ элементъ, длиной ds_1 , отстоящій отъ срединной оси въ разстояніи z . Нормальная напряженія, дѣйствующія по площади $d\omega$ поперечнаго сѣченія разсматриваемаго элемента, выражаются тогда

уравненіємъ:

$$n = \frac{N}{\omega} + \frac{M \cdot z}{J}$$

Въ каждой частицѣ этой площади, поперечнаго сѣченія dw
 фиг. 8.

элемента ds_1 , разовьется тогда [исходя отъ ненагруженного состоянія] потенциальная энергія:

$$\frac{n^2}{2} \frac{dw \cdot ds_1}{\varepsilon}$$

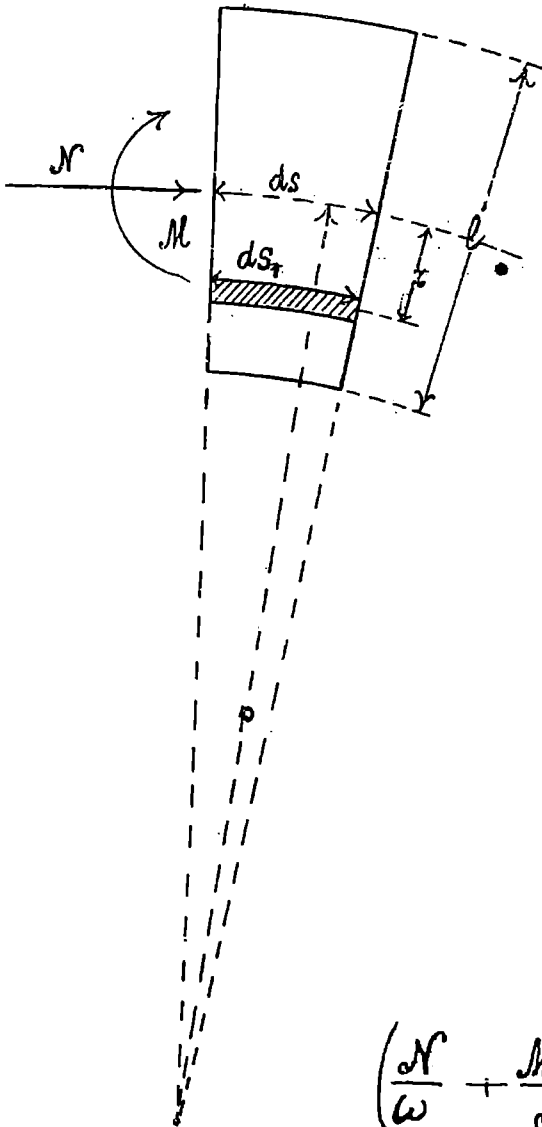
$$= \left(\frac{N}{\omega} + \frac{M \cdot z}{J} \right)^2 \frac{dw \cdot ds_1}{2\varepsilon} \dots |\alpha|$$

Если ρ есть радиусъ кривизны срединной линіи, то

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\rho - z}{\rho} = \left(1 - \frac{z}{\rho} \right)$$

сѣдовательно уравненіе $|\alpha|$ приметъ видъ:

$$\left(\frac{N}{\omega} + \frac{M \cdot z}{J} \right)^2 \frac{dw}{2\varepsilon} \cdot \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) ds \dots |\beta|$$



Суммируя потенциальную энергию, развивающуюся во всем
безконечно тонком клинѣ, длиной по срединной линіи ds ,
получаемъ:

$$dV = \frac{ds}{2\varepsilon} \left(\frac{N}{\omega} + \frac{Mz}{\gamma} \right)^2 \cdot d\omega \cdot \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) \dots\dots\dots | \gamma |$$

Проведя необходимыя вычисления въ уравненіи $| \gamma |$, и,
имѣя въ виду, что

$$\int d\omega = \omega; \quad \int d\omega \cdot z = 0; \quad \int d\omega \cdot z^2 = \gamma; \quad \int d\omega \cdot z^3 = 0$$

получаемъ:

$$dV = \frac{ds}{2\varepsilon} \left[\frac{N^2}{\omega} + \frac{M^2}{\gamma} - \frac{2NM}{\omega\rho} \right]$$

Отсюда потенциальная энергія всего стержня, длиной по
срединной линіи L , выразится такъ:

$$V = \int_0^L \frac{ds}{2\varepsilon} \left[\frac{N^2}{\omega} + \frac{M^2}{\gamma} - \frac{2NM}{\omega\rho} \right]$$

или

|14|

$$V = \int_0^L \frac{N^2 ds}{2\varepsilon\omega} + \int_0^L \frac{M^2 ds}{2\varepsilon\gamma} - \int_0^L \frac{N \cdot M \cdot ds}{\omega \cdot \varepsilon \cdot \rho}$$

Для кривых стержней, у которых радиус кривизны ρ в первоначальном состоянии всегда очень велик по сравнению с размерами поперечного сечения стержня, можно в уравнении $|\gamma|$ пропустить $\frac{z}{\rho}$ по сравнению с единицей и тогда уравнения |14| примут следующий вид:

$$U = \int_0^L \frac{N^2 ds}{2 E \omega} + \int_0^L \frac{M^2 ds}{2 E J} \dots\dots\dots |15|$$

Если пренебречь влиянием нормальной силы, то потенциальная энергия принимает еще более упрощенный вид, а именно:

$$U = \int \frac{M^2 ds}{2 E J} \dots\dots\dots |16|$$

Если теперь принять во внимание влияние сдвигающих усилий, то аналогично сказанному в пункте |2|, необходимо будет добавить в получения выше выражений |14, 15 и 16| для потенциальной энергии член

$$\int_0^L \frac{T^2 ds}{2 \cdot g \cdot \omega}$$

определяющий работу деформации кривого бруса от касательных или сдвигающих усилий.

9 | ТЕОРЕМА КАСТИЛИАНО. Пусть наши координаты, опре

дѣлющія положеніе системы, будутъ главныя, т.е. онѣ подобраны такъ, что потенциальная энергія содержитъ только квадраты координатъ и не заключаетъ ихъ произведеній, т.е. по уравненію 6 имѣемъ:

$$V = a\varphi^2 + b\psi^2 + c\vartheta^2 \dots\dots\dots$$

Тогда, согласно уравненію 3, внѣшнія силы Φ , Ψ , Θ , какъ производныя V по соответствующимъ координатамъ набравятся формулами:

$$\Phi = \frac{dV}{d\varphi} = 2a\varphi$$

$$\Psi = \frac{dV}{d\psi} = 2b\psi \quad |3a|$$

$$\Theta = \frac{dV}{d\vartheta} = 2c\vartheta$$

Каждая сила оказывается зависящей только отъ своей соответственной координаты и не зависитъ отъ другихъ координатъ. Изъ уравненія |3а| мы можемъ опредѣлить координаты въ зависимости отъ силъ и получимъ:

$$\varphi = \frac{1}{2a} \Phi$$

$$\psi = \frac{1}{2b} \Psi \quad |3б|$$

$$\vartheta = \frac{1}{2c} \Theta$$

Вставимъ эти величины въ выраженіе потенциальной энергіи V , получаемъ:

$$V = \frac{1}{4a} \Phi^2 + \frac{1}{4b} \Psi^2 + \frac{1}{4c} \Theta^2 \dots |7|$$

Такимъ путемъ мы получили новое выраженіе для потенциальной энергіи. Прежде она выражалась, какъ функція координатъ, теперь она выражается, какъ функція отъ вѣщихъ силъ. Но и новое выраженіе оказывается однородной функціей второй степени. Возьмемъ производную по одной изъ силъ Φ , получимъ:

$$\frac{dV}{d\Phi} = \frac{1}{2a} \Phi$$

но, сравнивая съ уравненіемъ |36|, видимъ, что это есть ни что иное, какъ координата φ , т.е.

$$|17| \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{dV}{d\Phi} \\ \psi = \frac{dV}{d\Psi} \\ \varrho = \frac{dV}{d\Theta} \end{array} \right. \quad \text{точно также найдемъ}$$

Эти зависимости и составляютъ теорему Кастиліано: если потенциальная энергія выражена въ зависимости отъ силъ, то производныя ея по силамъ будутъ представлять со -

отвѣтствующія координаты.

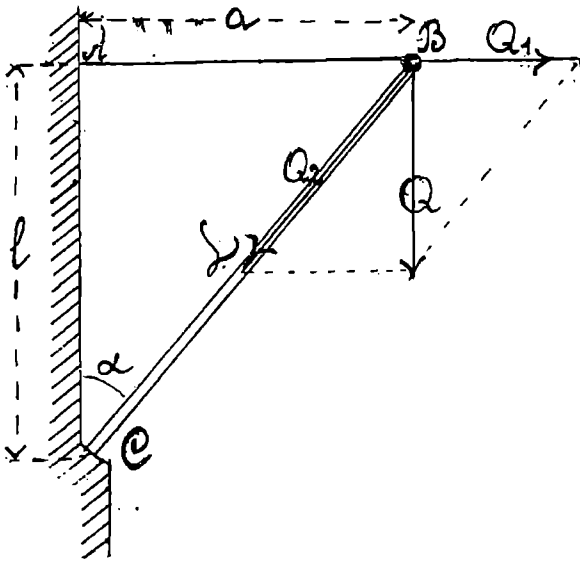
Теорема эта представляет полное соотвѣтствие съ теоремою Лагранжа, указанною въ № 4. Тамъ потенциаль- ная энергія выражалась въ зависимости отъ координатъ, и производныя ея по координатамъ давали силы соотвѣтству ющихъ типовъ. Здѣсь потенциальная энергія выражается въ зависимости отъ силъ, и производныя ея по силамъ бу дутъ координаты соотвѣтствующаго типа. Но теорема въ № 4 есть общая теорема, справедливая при всякомъ видѣ функціи, выражающей потенциальную энергію; требуется только, чтобы такая функція существовала, чтобы внут реннія силы имѣли потенциалъ. Между тѣмъ теорема Касти лиано тѣсно связана съ формой функціи, выражающей по тенциальную энергію и справедлива только для того слу чая, когда V есть однородная функція второй степени, т.е. только для упругихъ тѣлъ.

Теорема Кастилиано даетъ простой способъ нахожде нія перемѣщеній и измѣненія формы. Желая прибѣгать ее нужно помнить, что при этомъ потенциальная энергія долж на быть выражена въ функціи отъ внѣшнихъ силъ, рассмат риваемыхъ какъ независимыя перемѣнныя.

10 | ПРИМѢРЫ НА ПРИЛОЖЕНІЕ ТЕОРЕМЫ КАСТИЛИАНО.

П р и м ѣ р њ I. Опредѣлить, пользуясь теоремою Кастилиано, вертикальное перемѣщеніе точки B въ край, представленномъ на фиг. 9 подъ дѣйствіемъ груза Q Пис

фиг. 9.



щадь поперечнаго сѣченія деревяннаго подкоса ω_1 , коэффициентъ упругости ϵ_1 , площадь поперечнаго сѣченія желѣзнаго тѣла ω_2 , коэффициентъ упругости ϵ_2 .

Разложимъ силу Q по направленіямъ a и L , тогда

$$Q_1 = Q \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad Q_2 = \frac{Q}{\cos \alpha};$$

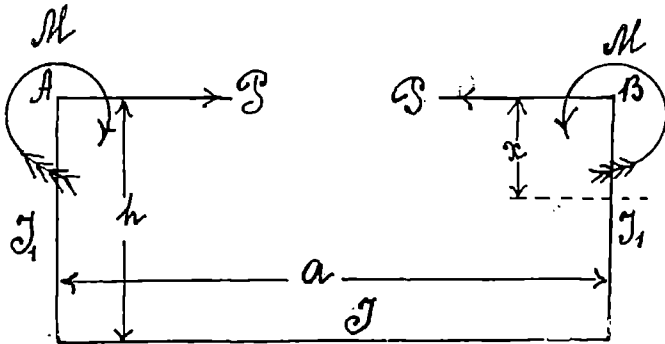
Потенціальная энергія системы будетъ тогда равна:

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q_1^2 \cdot a}{2 \epsilon_2 \omega_2} + \frac{Q_2^2 \cdot L}{2 \epsilon_1 \omega_1} = \\ &= \frac{(Q \operatorname{tg} \alpha)^2 a}{2 \epsilon_2 \omega_2} + \frac{\left(\frac{Q}{\cos \alpha}\right)^2 L}{2 \epsilon_1 \omega_1} \end{aligned}$$

Если обозначить вертикальное перемѣщеніе черезъ q , то

$$q = \frac{dv}{dQ} = \frac{Q \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot a}{\varepsilon_2 \omega_2} + \frac{Q \cdot L}{\varepsilon_1 \omega_1 \cos^2 \alpha}$$

Фиг. 10.



Примѣръ 2
Найти, пользуясь теоремой Кастильяно, сближеніе точек A и B при дѣйствіи силъ P и паръ M |фиг. 10|.

Потенціальная энергія стѣнокъ ба-

ка, согласно выраженію 12, будетъ равна:

$$U_1 = 2 \cdot \frac{1}{2 \varepsilon \gamma_1} \cdot \int_0^h (M + Px)^2 dx$$

Потенціальная энергія дна, у концовъ котораго будутъ дѣйствовать изгибающій моментъ

$$M_1 = M + Ph$$

согласно выраженію II, будетъ равна:

$$V_2 = \frac{(\mathcal{P}h + M)^2 \cdot a}{2 \cdot \varepsilon \cdot \mathcal{J}}$$

Общая потенциальная энергия системы равна:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \\ &= \frac{1}{\varepsilon \mathcal{J}_1} \int_0^h (M + \mathcal{P}x)^2 dx + \frac{(\mathcal{P}h + M)^2 \cdot a}{2 \cdot \varepsilon \cdot \mathcal{J}} \end{aligned}$$

Обозначая сближение точек A и B в направлении действия силы \mathcal{P} через ρ , получим:

$$\begin{aligned} \rho = \frac{dV}{d\mathcal{P}} &= \frac{2}{\varepsilon \mathcal{J}_1} \int_0^h (M + \mathcal{P}x) x dx + \frac{(\mathcal{P}h + M) a \cdot h}{\varepsilon \mathcal{J}} = \\ &= \frac{2}{\varepsilon \mathcal{J}_1} \left(\frac{Mh^2}{2} + \frac{\mathcal{P}h^3}{3} \right) + \frac{ah}{\varepsilon \mathcal{J}} (\mathcal{P}h + M) \end{aligned}$$

При $M = 0$

$$\rho_1 = \frac{2}{\varepsilon \mathcal{J}_1} \cdot \frac{\mathcal{P}h^3}{3} + \frac{\mathcal{P}h^2 \cdot a}{\varepsilon \mathcal{J}}$$

При $\mathcal{T} = 0$

$$P_2 = \frac{M \cdot h^2}{\epsilon J_1} + \frac{M a h}{\epsilon J}$$

Для нахождения угла поворота сечений A и B нужно составить производную $\frac{dV}{dM}$. Означенная производная даст сумму угловъ поворота сечений A и B . По симметрии заключаемъ, что поворотъ каждаго изъ сечений

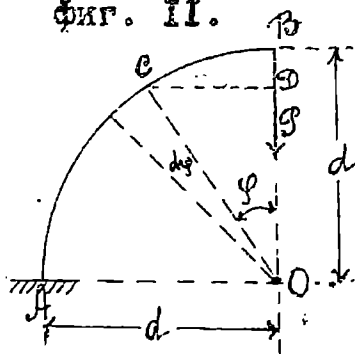
$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{dV}{dM}$$

или

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{\epsilon J_1} \int_0^h (M + P x) dx + \frac{(Ph + M)a}{\epsilon J} \right\} = \\ &= \frac{1}{\epsilon J_1} \left(Mh + \frac{Ph^2}{2} \right) + \frac{(Ph + M)a}{2 \cdot \epsilon J} \end{aligned}$$

Пр и м е р ь 3. Криволинейный брусок, радиуса d ,

фиг. II.



составляющій $\frac{1}{4}$ круга, изгибается вертикальной силой P (фиг. II.) Найдти опусканіе точки B . Вліяніемъ продольной и поперечной силъ можно пре-

небольш.

Потенциальная энергия системы, согласно выражению 16, будет равна:

$$V = \int_0^d \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot \epsilon \cdot \gamma}$$

В данном случае имеем:

$$ds = d \cdot d\varphi; \quad M = \mathcal{P} \cdot CD = \mathcal{P} \cdot d \cdot \sin \varphi,$$

следовательно:

$$V = \frac{1}{2 \epsilon \gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{P}^2 \cdot d^3 \sin^2 \varphi \cdot d\varphi$$

Обозначая опускание [вертикальное перем.] точки B через ρ , получим:

$$\begin{aligned} \rho = \frac{dV}{d\mathcal{P}} &= \frac{1}{\epsilon \gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{P} d^3 \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \\ &= \frac{\mathcal{P} d^3}{\epsilon \gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi \end{aligned}$$

или

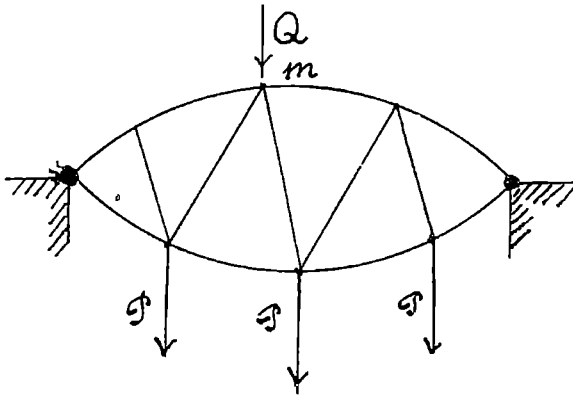
$$\rho = \frac{\mathcal{P}d^3}{\mathcal{E}\mathcal{J}} \left(-\frac{1}{4} \sin\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right)_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\mathcal{P}d^3}{\mathcal{E}\mathcal{J}} \cdot \frac{\pi}{4}$$

ВВЕДЕНИЕ ФИКТИВНЫХ ВНЕШНИХ СИЛЪ.

Иногда требуется опредѣлить въ формѣ или системѣ перемѣщеніе такого узла или точки, къ которымъ не приложено вовсе внешней силы. Или вообще: требуется опредѣлить такую изъ обобщенныхъ координатъ, соответствующая которой сила вовсе не приложена къ системѣ. По теоремѣ Кастиліано, каждое перемѣщеніе получается въ видѣ производной отъ потенциальной энергіи по соответствующей силѣ; но въ указанныхъ случаяхъ этой силы вовсе нѣтъ и она не входитъ въ выраженіе потенциальной энергіи. означенное затрудненіе легко обойти. Нужно только обобщить задачу, прибавивъ къ числу заданныхъ силъ еще фиктивную силу, которой не достаетъ т.е. силу соответствующую искомому перемѣщенію. Затѣмъ найдя, по теоремѣ Кастиліано, искомое перемѣщеніе въ этомъ случаѣ, нужно перейти къ заданному частному случаю, и положить, что прибавленная фиктивная сила равна нулю. Пояснимъ сказанное примѣрами.

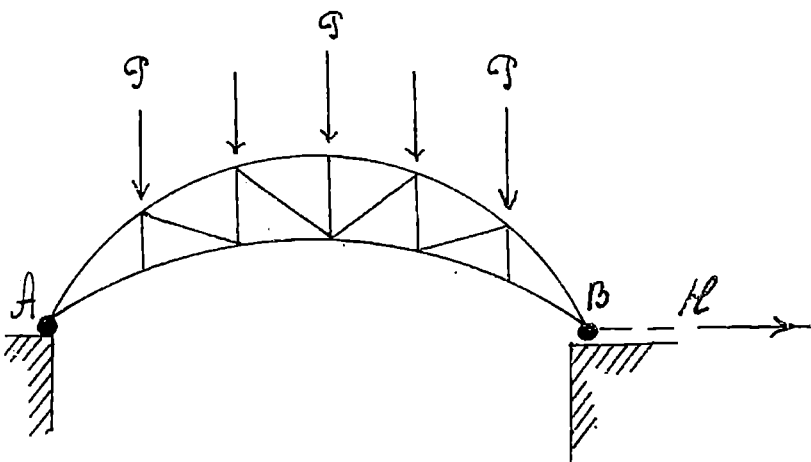
Фиг. 12.



Примѣръ 4
Пусть, напримѣръ, имѣемъ форму |фиг. 12| у которой нижніе узлы загружены, и требуется найти вертикальное перемѣщеніе какого нибудь изъ верхнихъ

узловъ m . Тогда необходимо къ действительнымъ нагрузкамъ P прибавить въ узелъ m фиктивную вертикальную нагрузку Q . Составить далѣе выраженіе для потенциальной энергии V и взять производную отъ нея по Q . Затѣмъ въ полученной производной положить: $Q = 0$.

Примѣръ 5. Требуется найти горизонтальное перемѣщеніе конца B фермы по опорѣ.



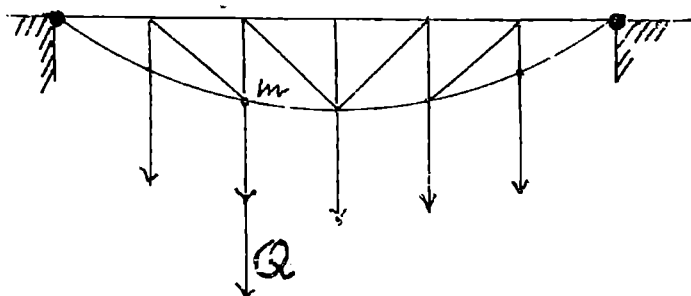
перемѣщеніе конца B фермы по опорѣ.

Нагрузка производится вертикальными силами P .

Здѣсь необходимо прибавить фиктивную горизонтальную силу H . Производная отъ потенциальной энергии V по H дастъ горизонтальное пе

резище точки B въ общемъ случаѣ. Затѣмъ необходимо перейти къ частному заданію, положивъ: $H = 0$

Къ прибавленію фиктивныхъ силъ приходится прибѣгать и въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣемъ нѣсколько одинаковыхъ нагрузокъ



фиг. 14. |фиг. 12, 13, 14|, такъ какъ при составленіи выраженія для потенциальной энергій всѣ силы P будутъ смѣшаны между собой и будетъ труд-

но отличить одну силу отъ другой.

Пр и м ѣ р ъ 6. Найти вертикальное перемѣщеніе узла m для случая |фиг. 14|.

Прибавимъ къ узлу m фиктивную силу Q и опредѣлимъ отдѣльно напряженія стержней фермы при двухъ случаяхъ: а| когда дѣйствуютъ всѣ нагрузки P ; в| когда дѣйствуетъ только нагрузка Q . Пусть напряженіе какого нибудь изъ стержней для перваго изъ этихъ случаевъ будетъ \mathcal{N}_1 , а для втораго - $\kappa \cdot Q$

$$\text{Полное напряженіе } \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \kappa \cdot Q$$

Слѣдовательно потенциальная энергія всей фермы выразится суммою отдѣльныхъ членовъ потенциальной энергій для каждаго стержня.

Потенциальная энергія для любого стержня, соглас-

по выражению 8

$$V_1 = \frac{J_1^2 L}{2 \cdot \varepsilon \omega} = \frac{(J_1 + \kappa Q)^2 L}{2 \cdot \varepsilon \omega}$$

Полная потенциальная энергия

$$V = \sum V_1 = \sum \frac{(J_1 + \kappa Q)^2 L}{2 \cdot \varepsilon \omega}$$

Обозначая искомое перемещение узла m через q , получим, что перемещение $|q_1|$ узла m , при действии заданных сил и фиктивной силы Q , равно:

$$q_1 = \frac{dV}{dQ} = \sum \frac{L}{\varepsilon \omega} \cdot (J_1 + \kappa Q) \cdot \kappa$$

Полагая $Q=0$, получим окончательно, что

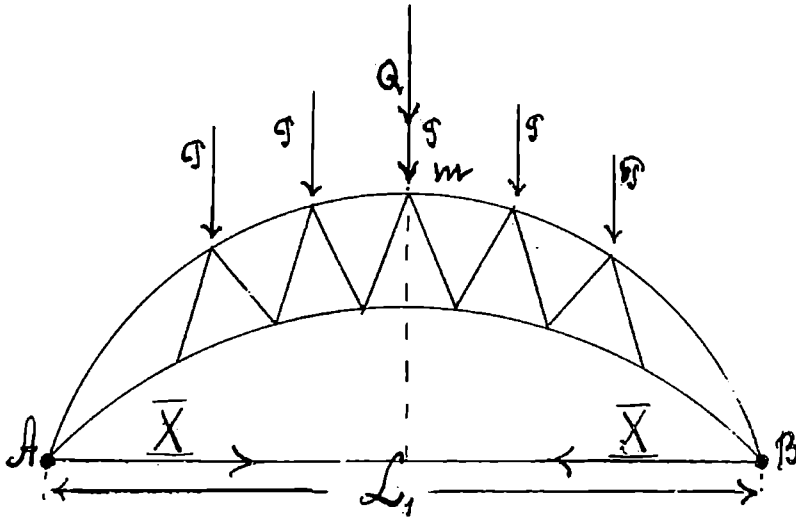
$$q = \sum \frac{L}{\varepsilon \omega} \cdot J_1 \cdot \kappa$$

Из вывода теоремы Кастилиано ясно усматривалось, что функция V представляет полную энергию всей си -

стемы, со включеніемъ, конечно, и статически неопредѣлимыхъ величинъ или лишнихъ неизвѣстныхъ. Это включеніе имѣетъ значеніе, когда ищемъ перемѣщеніе δ , отвѣчающее одной изъ статически неопредѣлимыхъ величинъ X , [т.е. которая считается одной изъ лишнихъ силъ, замѣняющей собой присутствіе лишней части фермы], такъ какъ въ этомъ случаѣ придется брать производную отъ потенциальной энергіи по силѣ X . Когда же ищутся перемѣщенія, отвѣчающія заданнымъ вѣшнимъ силамъ, то тогда можно и не вводить энергію лишнихъ силъ [статически неопредѣлимыхъ] въ выраженіе V . Ошибки отъ этого не будутъ, такъ какъ въ этихъ случаяхъ придется брать производныя отъ V по соответственнымъ заданнымъ вѣшнимъ силамъ, и слѣдовательно, производныя членовъ, представляющихъ энергію лишнихъ частей фермы, обратятся въ нуль. Изъ сказаннаго не слѣдуетъ думать, что измѣненіе фигуры вовсе не зависить отъ присутствія лишнихъ частей и ихъ напряженій. Эти напряженія войдутъ въ формулы, представляющія энергію необходимыхъ частей, а потому не исчезнутъ въ выраженіяхъ для перемѣщеній, несмотря на отбрасываніе тѣхъ членовъ, которые изображаютъ потенциальную энергію лишнихъ частей. Пояснимъ примѣромъ.

Примѣръ 7. Дана арка съ затяжкой [фиг. 15] нагруженная грузами P въ верхнихъ узлахъ. Требуется опредѣлить перемѣщеніе, соответствующее измѣненію дли-

Фиг. 15.



ны ватяжки, а также вертикальное перемещение среднего верхнего узла m фермы. Линейной неизвестной или статически неопределимой величиной в данном

случае будет усилие \bar{X} , соответствующее напряжению ватяжки. Обозначим перемещение, соответствующее усилию \bar{X} , т.е. изменение расстояния пятонъ A и B , через \mathcal{X} . Для нахождения же перемещения p предположим, что кроме заданных нагрузок P , в узлах действует еще фиктивная нагрузка Q , которую, по окончании вычислений, положим равной нулю.

Для составления выражения потенциальной энергии, нам нужно знать напряжения \mathcal{P} необходимых стержней фермы, эти напряжения могут быть рассматриваемы, как происходящие от совокупности трех причин:

- а | от нагрузок P
- б | от нагрузки Q
- в | от усилия \bar{X}, \bar{X}

Полное усилие \mathcal{P} равно суммъ напряжений, происхо-

данныхъ отъ этихъ трехъ причинъ.

Напряженія, вызываемыя силами Q и \bar{X} , пропорциональны этимъ внешнимъ силамъ. Обозначимъ далѣе, черезъ:

\mathcal{N}_1 - напряженія въ стержняхъ отъ нагрузокъ \mathcal{P} , въ предположеніи, что Q и \bar{X} равны нулю.

\mathcal{N}_2 - напряженія для случая, когда $Q=1$, а силы $\mathcal{P} = \bar{X} = 0$

\mathcal{N}_3 - напряженія для случая, когда $\bar{X}=1$, а силы $\mathcal{P} = Q = 0$

Значенія напряженій $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ легко опредѣляются помощью построенія диаграммъ.

Тогда

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 Q + \mathcal{N}_3 \bar{X}$$

и потенциальная энергія системы будетъ равна

$$U = \sum \frac{\mathcal{N}^2 L}{2 \varepsilon \omega} + \frac{\bar{X}^2 L_1}{2 \cdot \varepsilon \omega} =$$

$$= \sum \frac{L}{2 \cdot \varepsilon \omega} (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 Q + \mathcal{N}_3 \bar{X})^2 + \frac{\bar{X}^2 L_1}{2 \cdot \varepsilon \omega},$$

гдѣ

ω и L - площадь поперечнаго сѣченія и длина стержня

ω_1 и L_1 - площадь поперечнаго сѣченія и длина ватяжки.

Чтобы получить измѣненіе $|x|$ разстоянія AB , нужно взять производную отъ V по силѣ X ; нагрузку Q можемъ считать нулемъ. Получимъ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{dV}{dX} = \sum \frac{L}{\epsilon \omega} (\nu_1 + \nu_3 \bar{X}) \nu_3 + \frac{\bar{X} L_1}{\epsilon \omega_1} = \\ &= \sum \frac{L}{\epsilon \omega} \nu_1 \nu_3 + \bar{X} \left\{ \sum \frac{L}{\epsilon \omega} \nu_3^2 + \frac{L_1}{\epsilon \omega_1} \right\} \end{aligned}$$

Для нахождения вертикальнаго перемѣщенія узла m , нужно найти производную отъ V по Q ; при этомъ членъ

$$\frac{1}{2} \frac{\bar{X}^2 \cdot L_1}{\epsilon \cdot \omega_1}$$

можетъ быть отброшенъ съ самаго начала. А послѣ окончанія дифференцированія нужно положить $Q = 0$

На основаніи этого получимъ:

$$p = \frac{dV}{dQ} = \sum \frac{L}{\varepsilon \omega} \left(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_3 \overline{X} \right) \mathcal{I}_2 =$$

$$= \sum \frac{L}{\varepsilon \omega} \cdot \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 + \overline{X} \sum \frac{L}{\varepsilon \omega} \cdot \mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{I}_3$$

II | НАЧАЛО НАИМЕНЬШЕЙ РАБОТЫ. Эта теорема имѣетъ особое значеніе для изученія послѣдующихъ отдѣловъ, такъ какъ даетъ простой приѣмъ для нахождения статически - неопредѣлимыхъ величинъ или лишнихъ неизвѣстныхъ. Она представляетъ собою прямое слѣдствіе теоремы Кастиліано и также опредѣляется формой потенциальной энергіи упругихъ тѣлъ, т.е. тѣмъ обстоятельствомъ, что эта энергія есть однородная функція второй степени.

Та статически-неопредѣлимая величина, которую желаемъ опредѣлить, должна считаться внѣшней силой и потенциальная энергія системы должна быть выражена въ функціи внѣшнихъ силъ, какъ это требуется теоремой Кастиліано. Дифференцируя потенциальную энергію по статически-неопредѣлимой величинѣ, получимъ соотвѣтствующее ей перемѣщеніе. Рассмотримъ сначала тотъ случай, когда статически-неопредѣлимая величина есть одна изъ реакцій неподвижныхъ опоръ. Тогда соотвѣтствующее ей перемѣщеніе равно нулю. Называя потенциальную энергію черезъ V , а лишнюю неизвѣстную черезъ Q , получимъ:

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

Но V есть функция второй степени отъ силъ; ея производная будетъ содержать неизвѣстную x въ первой степени. Следовательно, предыдущее уравненіе можетъ служить для нахождения неизвѣстной x . Если у насъ нѣсколько неизвѣстныхъ реакцій неподвижныхъ опоръ: x, y, z, \dots то для каждой изъ нихъ получимъ такія же уравненія:

$$\frac{dV}{dx} = 0; \quad \frac{dV}{dy} = 0; \quad \frac{dV}{dz} = 0$$

Это будутъ совокупныя уравненія первой степени; число ихъ равно числу неизвѣстныхъ реакцій. Эти уравненія послужатъ для опредѣленія величинъ x, y, z, \dots

Возьмемъ теперь другой случай. Статически-неопредѣлимая величина R есть не реакція опоры, а одно изъ статически неопредѣлимыхъ внутреннихъ напряженій на какой нибудь части нашей системы. Отдѣлимъ эту часть отъ всей системы и присутствіе ея въ системѣ замѣнимъ силой R , которую будемъ считать внѣшней силой, приложенной къ системѣ. Не забудемъ, въ свою очередь, и отдѣленную часть системы. На нее можно смотрѣть какъ на подверженную внѣшней силѣ противоположной R ; ее

назовем $-X$

Составимъ выраженіе потенциальной энергіи отдѣльно для выдѣленной части и для остальной системы. Эти двѣ потенциальныя энергіи назовемъ: V_1 и V_2 , а общую ихъ сумму, т.е. потенциальную энергію всей системы, включая и лишнюю часть, назовемъ черезъ V , такъ что

$$V = V_1 + V_2$$

Какъ V_1 , такъ и V_2 должны быть выражены въ функции вѣншихъ силъ, включая въ нихъ число лишнюю силу X . Сначала применимъ теорему Кастиліано къ выдѣленной части. Называя черезъ X перемѣщеніе, отвѣчающее силѣ $-X$, получимъ

$$\frac{dV_1}{d(-X)} = - \frac{dV_1}{dX} = X.$$

Затѣмъ возьмемъ остальную систему. Дифференцируя ее по вѣнней силѣ X , получимъ то же перемѣщеніе X , какъ и прежде, т.е. $\frac{dV_2}{dX} = X$. Соединяя эти два уравненія, находимъ:

$$\frac{dV_1}{dX} + \frac{dV_2}{dX} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dV}{dX} = 0.$$

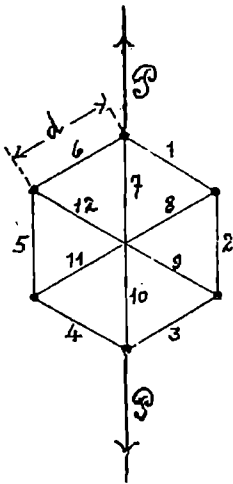
Теперь мы можемъ всѣ предыдущія разсужденія объединить въ видѣ слѣдующаго положенія: нужно выразить
.....

потенціальную енергію въ функціи внѣшнихъ силъ, при числя къ нимъ и статически неопредѣлимыхъ силъ и затѣмъ написать, что производныя енергіи, по каждой изъ статически неопредѣлимыхъ силъ, равны нулю. Изъ полученныхъ такимъ образомъ условныхъ уравненій могутъ быть найдены эти самыя статически неопредѣлимыхъ силы. Этому положенію придаютъ обыкновенно иную форму, которая, по существу, не даетъ ничего новаго, но представляетъ удобства для запоминанія, вслѣдствіе большей краткости выраженія. Именно, уравненіе $\frac{dV}{dx} = 0$ мы написали бы и въ томъ случаѣ, если бы искали максимумъ или минимумъ потенциальной енергіи, считая ее функціей, статически неопредѣлимой, силъ X . Слѣдовательно, наше положеніе можетъ быть высказано въ такомъ видѣ: нужно найти такія величины, статически неопредѣлимыхъ, силъ, которыя дѣлаютъ потенциальную енергію наибольшей или наименьшей. Это будутъ истинныя величины статически неопредѣлимыхъ силъ. Такъ какъ вторая производная потенциальной енергіи по статически неопредѣлимой силѣ необходимо положительна, то потенциальная енергія V будетъ наименьшей. По этой причинѣ выше высказанное правило часто называется началомъ наименьшей работы. Многие авторы придаютъ этому же положенію еще иное названіе: принципа производной работы деформациі. Нельзя не принять за послѣднимъ названіемъ большей правильности и вѣрности опредѣленія, такъ какъ по существу во

проста для насъ мало интересно будетъ ли энергія на -
 ибольшей или наименьшей. Уравненія наши въ обоихъ слу-
 чаяхъ остаются одни и тѣ же. Здѣсь же замѣтимъ, что,
 вмѣсто выраженія „потенціальная энергія“, въ техникѣ
 принято придерживатся обозначенія „работа деформа-
 цій“.

12 | ПРИМѢРЫ НА ПРИЛОЖЕНІЕ ПРИНЦИПА ПРОИЗВОДНОЙ РАБОТЫ ДЕФОРМАЦІИ.

П р и м ѣ р њ I. На шарнирную систему, имѣющую Фиг. 16.



дѣйствуютъ двѣ равныя и прямо про-
 тивоположныя силы P |фиг. 16|.

Найти усилія въ стержняхъ. Систе-
 ма имѣетъ: узловъ $K = 7$ и стерж-
 ней $Z = 12$; условія статической
 опредѣлимости $2K - 3 = Z$ удовлетво-
 рено, одинъ стержень лишній. За
 лишнюю неизвѣстную примемъ усиліе
 \bar{X} въ первомъ стержнѣ. Ввиду того,
 что шестиугольникъ правильной формы,

легко убѣдиться, что усилія въ остальныхъ стержняхъ
 контура будутъ $= \bar{X}$;

въ діагоналяхъ 8, 9, 11 и 12 усилія будутъ равны $|\bar{X}|$
 а въ діагоналяхъ 7-ой и 10-ой усилія $|P - \bar{X}|$

Потенціальная энергія всей системы равна

$$\begin{aligned}
 V &= 10 \frac{x^2 L}{2 \cdot \varepsilon \cdot \omega} + 2 \frac{(\mathcal{P} - x)^2 L}{2 \cdot \varepsilon \cdot \omega} = \\
 &= \frac{L}{\varepsilon \cdot \omega} \left\{ 5X^2 + (\mathcal{P} - X)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

На основаніи принципа производной работы деформациі

$$\frac{dV}{dX} = \frac{L}{\varepsilon \cdot \omega} \left\{ 10X + 2X - 2\mathcal{P} \right\} = 0$$

откуда

$$\underline{X} = \frac{\mathcal{P}}{6}$$

Примѣръ 2. Дана криволинейная ферма съ ватяжкой, изображенная на [фиг. 15] и нагруженная грузами \mathcal{P} , въ верхнихъ узлахъ. Требуется опредѣлить напряженія въ стержняхъ фермы.

Въ данномъ случаѣ напряженіе ватяжки есть лишняя неизвѣстная \underline{X} .

Напряженія \mathcal{S} остальныхъ стержней фермы состоятъся изъ двухъ слагаемыхъ:

I | напряженій \mathcal{S}_1 получающихся только отъ нагрузки \mathcal{P} , когда положимъ $\underline{X} = 0$

2 | напряжений, вызываемых одной силой \overline{X} ; эти внутренние силы пропорциональны \overline{X} и представляется выражением $\mathcal{S}_3 \cdot \overline{X}$, где \mathcal{S}_3 напряжение получающееся когда $\overline{X} = 1$, а всё \mathcal{P} равно нулю.

Величины \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_3 легко определяются. Всего лучше определить их на основании диаграмм, причем придется построить две диаграммы напряжений:

1 | одну для случая, когда действуют заданные нагрузки \mathcal{P} , а сила $\overline{X} = 0$

2 | другую для случая, когда нагрузки $\mathcal{P} = 0$, а сила \overline{X} равна единице. Первая диаграмма даст величины всех \mathcal{S}_1 , а вторая - величины всех \mathcal{S}_3 .

Истинное напряжение для каждого из стержней будет:

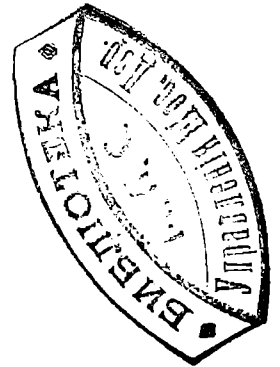
$$\mathcal{J} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_3 \overline{X}$$

Обозначая через \mathcal{L} длину стержня, а через ω - площадь его сечения, получим, что потенциальная энергия одного из стержней будет равна:

$$\frac{\mathcal{S}_0^2 \mathcal{L}}{2 \mathcal{E} \omega} = \frac{\mathcal{L}}{2 \mathcal{E} \omega} \left(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_3 \overline{X} \right)^2$$

Потенциальная энергия всех стержней фермы:

$$\sum \frac{\mathcal{L}}{2 \cdot \varepsilon \cdot \omega} \left(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_3 \bar{X} \right)^2$$



Потенциальная энергия затяжки:

$$\frac{\bar{X}^2 \mathcal{L}_1}{2 \cdot \varepsilon \cdot \omega_1}$$

Полная энергия системы:

$$\mathcal{V}^p = \frac{\mathcal{L}_1}{2 \cdot \varepsilon \cdot \omega_1} \bar{X}^2 + \sum \frac{\mathcal{L}}{2 \cdot \varepsilon \cdot \omega} \left(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_3 \bar{X} \right)^2$$

Применяя принцип производной работы деформации, получим:

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\bar{X}} = \frac{\mathcal{L}_1}{\varepsilon \cdot \omega_1} \bar{X} + \sum \frac{\mathcal{L}}{\varepsilon \cdot \omega} \mathcal{N}_3 \left(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_3 \bar{X} \right) = 0$$

или

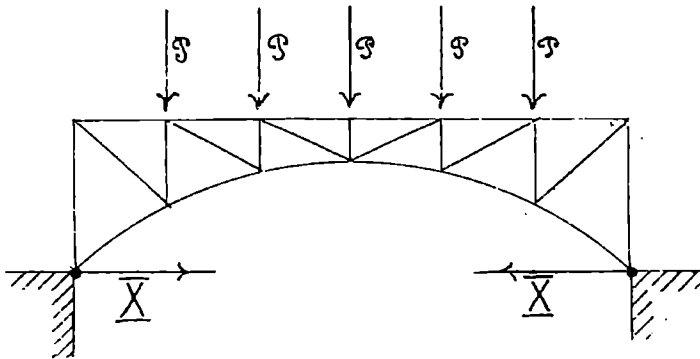
$$\frac{\bar{X} \mathcal{L}_1}{\varepsilon \cdot \omega_1} + \bar{X} \sum \mathcal{N}_3^2 \frac{\mathcal{L}}{\varepsilon \cdot \omega} + \sum \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_3 \frac{\mathcal{L}}{\varepsilon \cdot \omega} = 0$$

откуда получается \underline{X} . Зная же \underline{X} , легко найти и напряжения в остальных стержнях фермы, пользуясь равенством, что для каждого стержня

$$S = S_1 + S_3 \cdot \underline{X}$$

Пр и м ъ р њ 3. Дана арочная ферма [фиг. 17] с шарнирными неподвижными опорами и нагруженная грузами \mathcal{P} , в верхних узлах. Так как обе опоры шарнирные неподвижные, то ферма статически

неопределима. Благодаря неподвижности опор, кроме вертикальных реакций, должны появиться и горизонтальные реакции, препятствующие раздвижению опор. Величину горизонтальной реакции и примем за лишнюю неизвестную \underline{X} . Для определения лишней неизвестной (статически неопределимой) \underline{X} надо составить потенциальную энергию системы и, взяв первую производную от нее, приравнять ее нулю. Для составления же выражения потенциальной энергии нам нужно знать напряжения S всех стержней фермы. Эти напряжения могут быть, как и в примере 2, рассмотрены как сумма напряжений, т.е.



неопределима. Благодаря неподвижности опор, кроме вертикальных реакций, должны появиться и горизонтальные реакции, препятствующие раздвижению опор. Величину горизонтальной реакции и примем за лишнюю неизвестную \underline{X} . Для определения лишней неизвестной (статически неопределимой) \underline{X} надо составить потенциальную энергию системы и, взяв первую производную от нее, приравнять ее нулю. Для составления же выражения потенциальной энергии нам нужно знать напряжения S всех стержней фермы. Эти напряжения могут быть, как и в примере 2, рассмотрены как сумма напряжений, т.е.

$$\sigma_i = \sigma_{i1} + \sigma_{i3} \bar{X} \quad \text{гдѣ}$$

σ_{i1} - напруженія въ стержняхъ, опредѣленныя изъ діаграммы, при условіи загрузенія всей фермы грузами \mathfrak{P} и при $\bar{X} = 0$, т.е. какъ будто одна изъ опоръ была бы подвижная.

σ_{i3} - напруженія въ стержняхъ, опредѣленныя изъ діаграммы, построенной при условіи, что грузы \mathfrak{P} равны нулю, а сила $\bar{X} = 1$

Потенціальная энергія всей системы равна :

$$V = \sum \frac{L}{2 \cdot \varepsilon \omega} (\sigma_{i1} + \sigma_{i3} \bar{X})^2$$

тогда

$$\frac{dV}{d\bar{X}} = \sum \frac{L}{\varepsilon \omega} (\sigma_{i1} + \sigma_{i3} \bar{X}) \sigma_{i3} = 0$$

откуда

$$\bar{X} = - \frac{\sum \frac{L}{\omega} \cdot \sigma_{i1} \sigma_{i3}}{\sum \frac{L}{\omega} \cdot \sigma_{i3}^2}$$

Для удобства вычисленій величины σ_{i1} и σ_{i3} . какъ въ

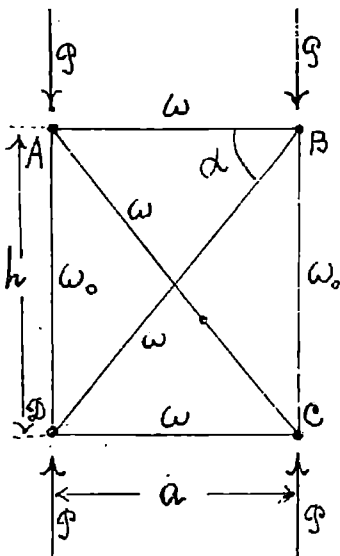
данномъ примѣрѣ, такъ и въ предыдущемъ |2|, слѣдуетъ располагать въ таблицѣ, образецъ который и приведемъ и ниже.

Опредѣливъ \bar{X} , легко найти напряженіе въ любомъ стержнѣ фермы изъ равенства:

$$S = S_1 + S_2 \bar{X}$$

Примѣръ 4. Прямоугольная шарнирная рама $ABCD$ съ діагоналями AC и BD сжимается силами P .

фиг. 18.



Найти усилія въ стержняхъ если сѣченія стоекъ AD и BC равны ω_0 , остальные стержни имѣютъ сѣченіе ω |фиг. 18|.

Обозначимъ лишнее неизвѣстное усиліе діагонали DB черезъ \bar{X} .

Для опредѣленія напряженій въ необходимыхъ стержняхъ системы, рассмотримъ два случая загрузенія ея, а именно:

Первый случай, когда дѣйствуютъ силы P , а сила $\bar{X} = 0$. При этомъ, очевидно, напряженія въ стержняхъ AD и BC будутъ равны $-P$, а напряженія въ AB , DC и AC будутъ равны нулю.

Таблица для вычисления L_1 и L_2

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------------------------------------|--------------------------------|--|--------------------------------------|--------------------------------------|---|---|--|
| Номера стероженей N_1 N_2 | Длина стероженей L см. | Площадь сечения ω см ² | Величина напряжения σ_1 | Величина напряжения σ_2 | Величина напряж.м. $\sigma_2 \bar{X}$ | Величина: $\frac{L \cdot \sigma_1 \sigma_2}{\omega}$ | Величина: $\frac{L \cdot \sigma_2^2}{\omega}$ |
| 1 | 320 | 20 | -29 | +1,2 | +1,2 \bar{X} | -38,49 | 23,04 |
| 2 | 300 | 15 | +1,59 | -2,1 | -2,1 \bar{X} | -639 | 88,20 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 200 | 12 | +1,2 | -2,2 | -2,2 \bar{X} | -449 | 80,7 |
| | | | | | | $\sum \frac{L \sigma_1 \sigma_2}{\omega}$ | $\sum \frac{L \sigma_2^2}{\omega}$ |

Второй случай, когда действует сила \bar{X} , а силы $\mathcal{P} = 0$.

Въ этомъ случаѣ, очевидно, усилія будутъ равны:

$$\text{для } AB \text{ и } DC - \bar{X} \cos \alpha$$

$$\text{для } AD \text{ и } BC - \bar{X} \sin \alpha$$

$$\text{для } AC - \bar{X} \text{ | по знаку противоположно усилію } DB \text{. |}$$

Окончательно имѣемъ, что усилія въ стержняхъ системы будутъ равны:

$$\text{для } AB \text{ и } DC - \bar{X} \cos \alpha$$

$$\text{для } AC - \bar{X}$$

$$\text{для } AD \text{ и } BC - \mathcal{P} + \bar{X} \sin \alpha$$

Полная потенциальная энергія системы равна:

$$\begin{aligned} V = & 2 \frac{(\mathcal{P} + \bar{X} \sin \alpha)^2 \cdot h}{2 \cdot \epsilon \omega_0} + \\ & + 2 \cdot \frac{\bar{X}^2 \cos^2 \alpha \cdot a}{2 \cdot \epsilon \omega} + 2 \cdot \frac{\bar{X}^2 \cdot l}{2 \cdot \epsilon \omega} \end{aligned}$$

Примѣняя принципъ производной работы деформаци, получимъ:

$$\frac{d.V}{d.\bar{X}} = \frac{(\mathcal{P} + \bar{X} \sin \alpha) h \cdot \sin \alpha}{\omega_0} +$$

$$+ \frac{\bar{X} \cos^2 \alpha \cdot a}{\omega} + \frac{\bar{X} l}{\omega} = 0$$

Имея в виду, что $h = l \cdot \cos \alpha$; $a = l \cdot \sin \alpha$ и $\frac{a}{h} = \operatorname{tg} \alpha$, и решая уравнение, имеем:

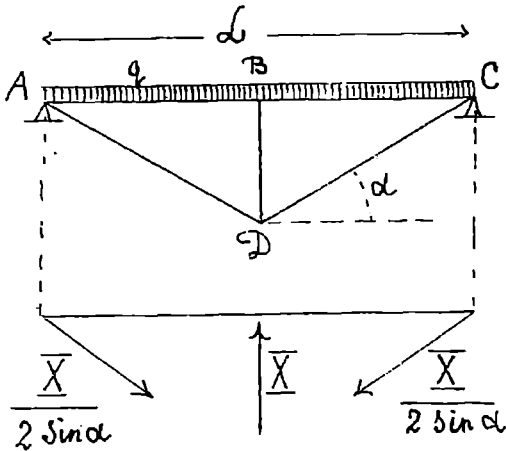
$$\bar{X} = \frac{\mathcal{P}}{\sin \alpha + \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{a}{h} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{l}{h \cdot \sin \alpha}}$$

$$= \frac{\mathcal{P}}{\sin \alpha + \frac{a^2 \omega_0 \cos \alpha}{h^2 \omega} + \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{h^2 + a^2}{h \cdot a}}$$

Пример 5. Определить усилие \bar{X} в стойке шпрингальной балки, показанной на [фиг. 19]. Нагрузка — равномерно распределенная q .

Балка деревянная, площадью сечения ω , с коэффициентом упругости E и моментом инерции J . Тяжи и стойка железные, коэффициент упругости E_1 , площадь сечения стойки ω_2 , площадь сечения тяжей — ω_1 . Потенциальная энергия балки AC определится на ос-

Фиг. 19.



нованим нижеслѣдующихъ
соображеній: на балку
дѣйствуютъ силы: нагруз-
ка q и \bar{X} , изгибающіе
ее и силы

$$\frac{\bar{X}}{2 \cdot \sin \alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{\bar{X}}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

приложенныя по концамъ
балки и сжимающія ее. Потенціальная энергія ея равна

$$U_1 = \frac{2}{2 \cdot E \cdot J} \int_0^{\frac{L}{2}} M_x^2 \cdot dx + \frac{\bar{X}^2 \cdot L}{8 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot E \omega}$$

|смотри выраженія 8 и 12|.

Потенціальная энергія тяжей.

$$U_2 = 2 \cdot \frac{\bar{X}^2 \cdot DC}{2 \cdot 4 \sin^2 \alpha \cdot E \omega_1} =$$

$$= 2 \frac{\bar{X}^2 \cdot L}{8 \sin^2 \alpha \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot E \omega_1} = \frac{\bar{X}^2 \cdot L}{8 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot E \omega_1}$$

Потенціальная енергія стойки:

$$V_3 = \frac{\bar{X}^2 \cdot BD}{2 \cdot \epsilon_1 \omega_2} = \frac{\bar{X}^2 \cdot L \operatorname{tg} \alpha}{4 \epsilon_1 \omega_2}$$

Потенціальная енергія, всей системы равна:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Производная отъ потенциальной энергии по \bar{X} равна:

$$\frac{dV}{d\bar{X}} = \frac{dV_1}{d\bar{X}} + \frac{dV_2}{d\bar{X}} + \frac{dV_3}{d\bar{X}}$$

$$\frac{dV_1}{d\bar{X}} = \frac{2}{\epsilon \gamma} \int_0^{\frac{L}{2}} M_x \cdot \frac{dM_x}{dx} \cdot dx + \frac{\bar{X} L}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \epsilon \omega}$$

НО

При равномерной нагрузкѣ:

$$M_x = \frac{qL}{2} x - \frac{qx^2}{2} - \frac{\bar{X}}{2} x; \quad \frac{dM_x}{d\bar{X}} = -\frac{x}{2}$$

следовательно:

$$\frac{dV_1}{d\bar{X}} = \frac{2}{\epsilon \gamma} \int_0^{\frac{L}{2}} \left\{ \frac{qL}{2} x - \frac{qx^2}{2} - \bar{X} \frac{x}{2} \right\} \left(-\frac{x}{2} dx + \frac{\bar{X} \cdot L}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \epsilon \omega} \right) =$$

$$= \frac{\bar{X} \cdot L^3}{48 \cdot \epsilon \gamma} - \frac{5qL^4}{384} + \frac{\bar{X} L}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \epsilon \omega}$$

$$\frac{dV_2}{d\bar{X}} = \frac{\bar{X} L}{4 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \epsilon_1 \cdot \omega_1}$$

$$\frac{dV_3}{d\bar{X}} = \frac{\bar{X} \cdot L \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2 \cdot \epsilon_1 \cdot \omega_2}$$

Приравнявая производную нулю получимъ:

$$\frac{\bar{X} L^3}{48 \cdot \epsilon \gamma} - \frac{5 \cdot q L^4}{384} + \frac{\bar{X} L}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \epsilon \cdot \omega} +$$

$$+ \frac{\bar{X} \cdot L}{4 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \epsilon_1 \cdot \omega_1} + \frac{\bar{X} \cdot L \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2 \cdot \epsilon_1 \cdot \omega_2} = 0$$

или

$$\bar{X} \left\{ \frac{L^3}{48 \cdot \epsilon \gamma} + \frac{L}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \epsilon \cdot \omega} + \frac{L}{4 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \epsilon_1 \cdot \omega_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{L \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2 \cdot \epsilon_1 \cdot \omega_2} \right\} = \frac{5qL^4}{384}$$

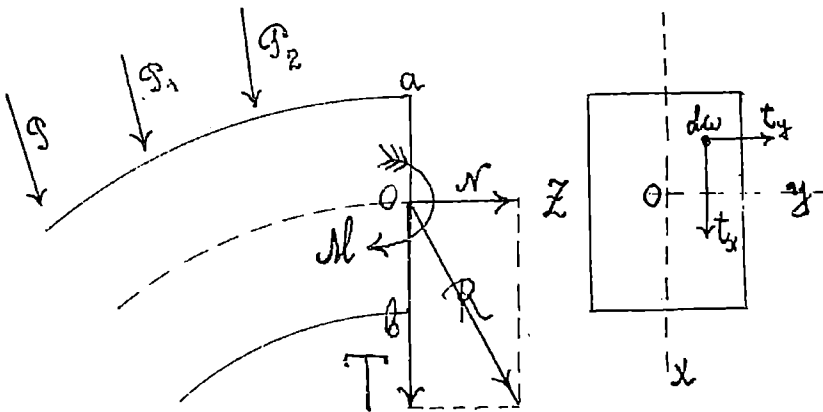
Откуда легко можно определить \bar{X} по даннымъ размѣрамъ системы.

Г л а в а II.

КРИВОЙ БРУСЬ И ОПРЕДѢЛЕНІЕ ЕГО ДЕФОРМАЦІЙ.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію напряженій и деформаций въ брускахъ съ кривою осью. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ брусковъ, ось которыхъ представляетъ плоскую кривую. Будемъ предполагать, что внѣшнія силы лежатъ въ плоскости оси бруса, въ той же плоскости лежитъ одна изъ главныхъ осей инерціи, каждаго поперечнаго сѣченія. Въ такомъ случаѣ и послѣ искривленія ось бруса будетъ представлять собой плоскую кривую. Измѣненія формы бруса при дѣйствіи внѣшнихъ силъ будемъ предполагать малыми. Разсѣжемъ брусъ сѣченіемъ ab [фиг. 20] нормальнымъ къ оси X и разсмотримъ условія равновѣсія одной какой либо половины бруса. Всѣ силы, лежація, на примѣръ, по лѣвую сторону сѣченія ab могутъ быть приведены, какъ извѣстно, къ одной силѣ R , приложенной въ центрѣ тя-

фиг. 20.



кости O попе-
 речнаго сѣченія и
 къ парѣ силъ M
 Сила R можетъ
 быть разложена
 на составляющія:
 N - нормаль-
 ную къ сѣченію
 ab и T , ле-
 жащую въ плоско-
 сти сѣченія.

Внутреннія силы упругости, дѣйствующія по плоскости поперечнаго сѣченія ab и представляющія собой дѣйствіе отброшенной правой части бруса на лѣвую, оче- видно должны уравновѣшивать вѣшнія силы, приложен- нныя къ лѣвой части бруса. Выдѣлимъ въ плоскости по- перечнаго сѣченія ab безконечно малый элементъ dw и назовемъ черезъ $n dw$ нормальную составляющую, дѣй- ствующаго на этотъ элементъ усилія, а черезъ $t_x dw$ и $t_y dw$ касательныя составляющія того же усилія. Въ такомъ случаѣ мы можемъ написать три условія рав- новѣсія:

$$\left. \begin{aligned} N + \int_{\omega} n dw &= 0 \\ T + \int_{\omega} t_x dw &= 0 \\ M - \int_{\omega} x \cdot n dw &= 0 \end{aligned} \right\} \text{I}$$

Если бы намъ былъ извѣстенъ законъ распределе -
нія усилий n , t_x , t_y по плоскости поперечнаго сѣче -
нія, то, пользуясь уравненіями I, мы могли бы найд -
ти величину напряженій по заданнымъ внѣшнимъ силамъ.
Въ виду того что законъ распределеія усилий n , t_x
и t_y не извѣстенъ, то при опредѣленіи напряженій въ
кривыхъ брускахъ мы въ дальнѣйшемъ будемъ различать
два случая:

I | Случай брусевъ-малой кривизны т.е. когда
кривизна брусевъ незначительна и радіусъ ихъ кривиз -
ны очень великъ по сравненію съ поперечными разме -
рами бруса |мостовня, стропильныя фермы, арки, сво -
ды и т.п. |.

2 | Случай брусевъ большой кривизны - когда ра -
діусъ кривизны брусевъ не настолько значителенъ, что
бы отношеніями къ нему поперечныхъ размеровъ бруса
можно было бы пренебрегать |крюкъ, звено цѣпи, коль -
цо и т.п. |.

III | БРУСЬЯ МАЛОЙ КРИВИЗНЫ. Если кривизна бруса
незначительна, то мы можемъ съ достаточной точностью
допустить, что законъ распределеія напряженій по
плоскости поперечнаго сѣченія такой же какъ и въ
брускахъ съ прямолинейной осью.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ мы можемъ пред -
ставить себѣ кривизну бруса до деформациі его, какъ
результатъ дѣйствія на прямой брусъ нѣкоторыхъ вооб -

ражаемыхъ внѣшнихъ силъ. Но при малыхъ измѣненіяхъ формы брусъевъ, совместное дѣйствіе воображаемыхъ и данныхъ силъ должно быть равно суммѣ отдѣльныхъ дѣйствій на прямой брусъ тѣхъ и другихъ силъ; поэтому дѣйствіе внѣшнихъ силъ на кривой брусъ выравится: нормальнымъ напряженіемъ

$$n_1 = \pm \frac{M \cdot z}{J}$$

отъ вліянія пары силъ $|M|$, затѣмъ нормальнымъ напряженіемъ

$$n_2 = \frac{N}{\omega}$$

отъ вліянія продольной силы $|N|$ и касательнымъ напряженіемъ

$$t = \frac{T \cdot \rho}{J \cdot b}$$

отъ дѣйствія поперечной силы $|T|$. Такимъ образомъ въ любомъ данномъ сѣченіи кривого бруса будутъ имѣть мѣсто напряженія

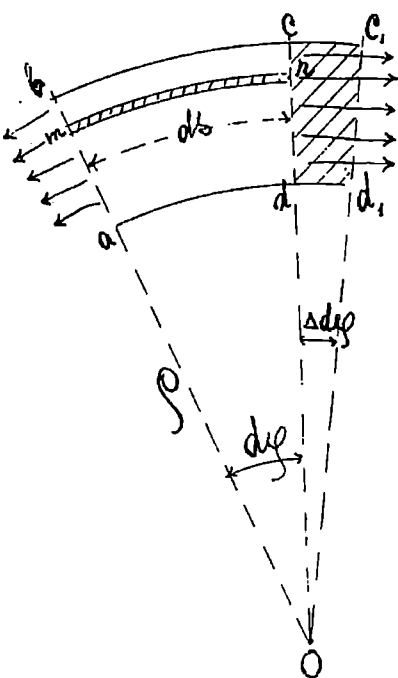
$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{N}{\omega} \pm \frac{M \cdot z}{J} \\ t &= \frac{T \cdot \rho}{J \cdot b} \end{aligned} \right\} \text{II}$$

Что касается касательных напряжений $|\tau|$, то нужно заметить, что их значение въ случаѣ кривыхъ брусъвъ несравненно меньше, чѣмъ въ брусъяхъ съ прямолинейной осью. Поэтому обыкновенно касательными усилиями пренебрегаютъ.

Деформація кривого бруса опредѣляется по двумъ величинамъ: приращенію $\Delta d\varphi$ угла смежности $d\varphi$ |уголъ между двумя смежными сѣченіями| и удлиненію Δds отръзка оси, длиной ds между смежными сѣченіями. Вліяніемъ сдвига на деформацію бруса мы будемъ пренебрегать, подобно тому, какъ это дѣлалось при опредѣленіи упругой линіи прямыхъ брусъвъ. Изучимъ отдѣльно деформаціи вызываемыя продольной силой и отдѣльно деформаціи отъ изгибающаго момента M .

НОРМАЛЬНАЯ |ПРОДОЛЬНАЯ| СИЛА N вызываетъ въ сѣченіи равномерное сжимающее или растягивающее напряже -

ніе $\frac{N}{\omega}$, которому соот - вѣтствуетъ укороченіе или удлиненіе отръзка оси бруса ds на величину Δds . Всякое другое волокно укоротится или удлинится на величину, пропорціональную первоначальной длинѣ, и потому сѣченіа ab и cd |фиг. 21| останутся плоскими и бу



дуть пересѣкаться въ томъ же мѣстѣ | 0 |, что и до деформациі.

Первоначальный уголъ смежности $d\varphi$ увеличится на величину $\Delta d\varphi$.

Нетрудно видѣть, что величина измѣненія угла всегда очень мала. Въ самомъ дѣлѣ: на основаніи законовъ равномернаго сжатія или растяженія имѣемъ, что

$$\Delta ds = \frac{N ds}{E \cdot \omega} \dots \dots |a|$$

Слѣдовательно $\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{E \cdot \omega} = i$, но $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{\Delta ds}{ds}$

поэтому: $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{E \cdot \omega} = i \dots \dots |a|$

Величина относительнаго укороченія или удлиненія | i | при допускаемыхъ напряженіяхъ, напримѣръ, для желѣза не превосходитъ

$$\frac{1000}{2000000} = \frac{1}{2000}$$

для желѣзо-бетона - не выше

$$\frac{25}{150000} = \frac{1}{6000}$$

для кирпичной кладки на цементномъ растворѣ - не счи-
таю: $\frac{12}{30000} = \frac{1}{2500}$

Слѣдовательно продольная сила N не измѣняетъ первоначальнаго радиуса кривизны бруса и весьма сла-
бо вліяетъ на измѣненіе угла смежности, поэтому, въ
большинствѣ практическихъ случаевъ при опредѣленіи
деформации бруса можно будетъ пренебрегать продоль-
ной силой.

Исслѣдуемъ теперь вліяніе пары силъ M на де-
формацию бруса. Назовемъ черезъ ρ радиусъ кривизны
оси бруса въ рассматриваемомъ сѣченіи до деформации
бруса и черезъ ρ^1 послѣ нея. Рассматривая первоначальную
кривизну бруса, какъ результатъ дѣйствія на
прямой брусъ воображаемыхъ внѣшнихъ силъ и обозначая
ихъ моментъ черезъ M_1 , мы можемъ выразить послѣд-
ній черезъ радиусъ кривизны ρ по известной изъ Со
противленія матеріаловъ формулѣ

$$M_1 = \frac{E \cdot J}{\rho}$$

Точно также для радиуса ρ^1 кривизны, рассматри-
ваемой какъ результатъ совмѣстнаго дѣйствія вообра-
жаемыхъ и данныхъ силъ, дающихъ изгибающій моментъ

$M_1 + M_2$ находимъ

$$M_1 + M = \frac{E \cdot J}{\rho_1}$$

Слѣдовательно

$$M = \frac{E \cdot J}{\rho_1} - \frac{E \cdot J}{\rho} = E \cdot J \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right)$$

Откуда находимъ зависимость

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J} \quad |в| \quad \text{т.е. изменение кри}$$

визны оси бруса пропорціонально изгибающему моменту M .

Такъ какъ длина ds отрѣзка оси прямого бруса не измѣняется отъ вліянія моментовъ M_1 и M , то

$$ds = \rho \, d\varphi \quad \text{и} \quad ds = \rho_1 (d\varphi + \Delta d\varphi)$$

откуда

$$d\varphi + \Delta d\varphi - d\varphi = \frac{ds}{\rho_1} - \frac{ds}{\rho}$$

$$\frac{\Delta dy}{ds} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \dots |г| \text{ Подставляя, найденное значение}$$

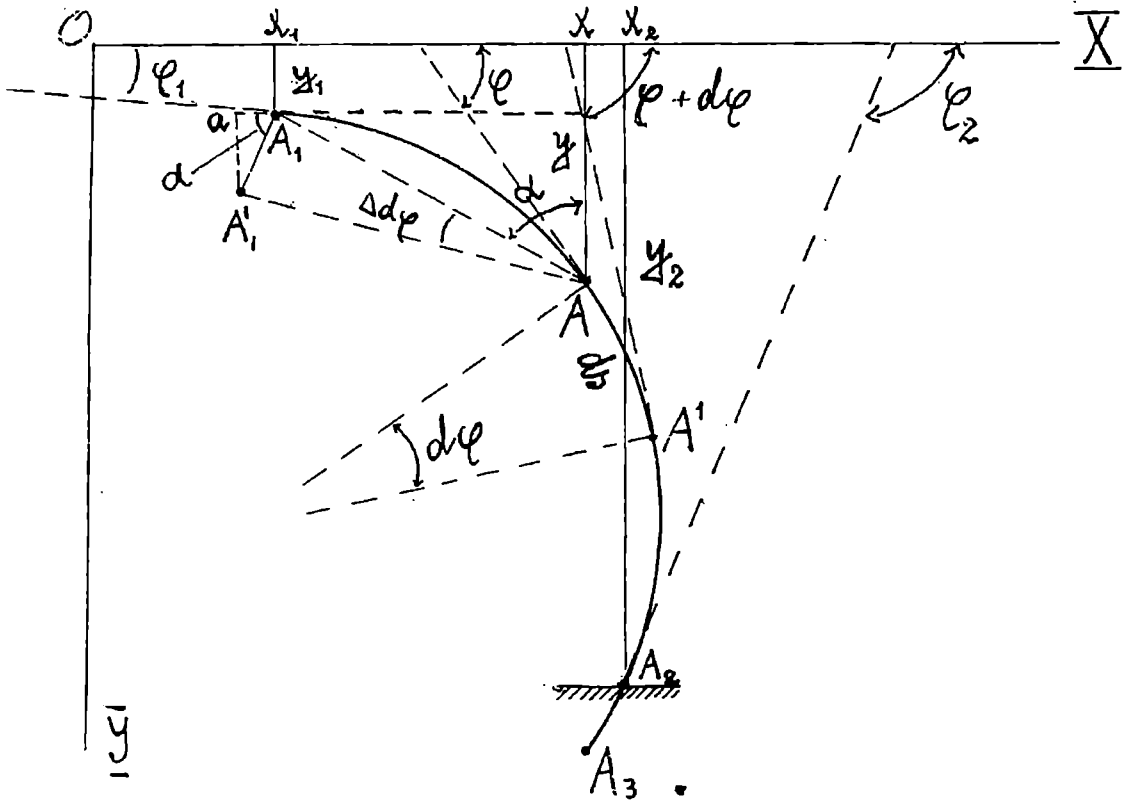
получимъ $\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}$ въ уравненіе |в|.

$$\frac{\Delta dy}{ds} = \frac{M}{E \cdot J} \text{ или } \Delta dy = \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \dots |д|$$

Имѣя величины |а| и |д| деформаций элемента бруса, можно теперь найти для всего бруса прираще-
 ніе угла $\Delta(\varphi_2 - \varphi_1)$ между двумя какими нибудь сѣче-
 ніями или касательными къ оси бруса въ точкахъ A_1
 $|x_1$ и $y_1|$ и $A_2 |x_2$ и $y_2|$, а также измѣненія разсто-
 янія между послѣдними $\Delta(x_2 - x_1)$ и $\Delta(y_2 - y_1)$ по
 осямъ x и y [фиг. 22].

Выдѣлимъ у точки A |съ коорд. x и y | бруса элементъ, длиной $AA_1 = ds$ и рассмотримъ вліяніе де-
 формации этого элемента на перемѣщенія точки A_1 , при
 этомъ отдѣльно оцѣнимъ вліяніе удлиненія или укро-
 ченія элемента отъ продольной силы M и отдѣльно влі-
 яніе искривленія выдѣленнаго элемента. Для этого
 представимъ себѣ пока, что кривой брусъ неизмѣняемо
 закрѣпленъ сѣченіемъ въ точкѣ A_2 .

Фиг. 22.



Дѣйствиє продольной силы N на элементъ AA_1 выразится измѣненіемъ длины его и поступательнымъ движеніемъ всей лѣвой части бруса AA_1 на величину [см. ур. а]

$$\Delta ds = \frac{N \cdot ds}{E \cdot \omega} \quad \text{по направленію касательной}$$

въ точкѣ A оси бруса, слѣдовательно перемѣненіе

по оси X овъ будетъ $\Delta ds \cdot \cos \varphi$ а

по оси Y овъ будетъ $\Delta ds \cdot \sin \varphi$

Но $dx = ds \cos \varphi$ и $dy = ds \sin \varphi$ следовательно

$$\cos \varphi = \frac{dx}{ds} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{dy}{ds} \quad \text{а потому}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta ds \cdot \cos \varphi &= \frac{\Delta ds \cdot dx}{ds} = \frac{N \cdot dx}{E \cdot \omega} \\ \Delta ds \cdot \sin \varphi &= \frac{\Delta ds \cdot dy}{ds} = \frac{N \cdot dy}{E \cdot \omega} \end{aligned} \right\} \dots |e|$$

При удлинениі всѣхъ элементовъ бруса, разстояніе $[x_2 - x_1]$ получитъ приращеніе

$$\Delta(x_2 - x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{N \cdot dx}{E \cdot \omega} \quad \dots |ж|$$

а разстояніе $[y_2 - y_1]$ получитъ приращеніе

$$\Delta(y_2 - y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{N \cdot dy}{E \cdot \omega} \quad \dots |з|$$

Если вліяніемъ продольной силы N на измѣне -

не угла смежности $d\varphi$ нельзя пренебречь, то тогда означенное влияние, принимая во внимание равенства $|b|$, выразится для элемента $\{A A_1\}$ величиной

$$\Delta d\varphi = \frac{N \cdot ds}{E \cdot \omega}$$

а для всего бруса въ - пределахъ отъ X_1 до X_2

$$\Delta \varphi = \int_{X_1}^{X_2} \frac{N \cdot ds}{E \cdot \omega} \dots |u|$$

Разсмотримъ теперь влияние искривленія выдѣ - леннаго элемента.

Когда у какой нибудь точки A оси бруса съ коор - динатами X и Y происходитъ по длинѣ ds увеличеніе угла смежности на величину $\Delta d\varphi$, то при этомъ лѣ - вая часть $A_1 A$ бруса вращается относительно точки A на элементарный уголъ $\Delta d\varphi$ (Строго говоря враще - ніе будетъ происходить около нѣкоторой промежуточной точки между A и A_1 , но такъ какъ A и A_1 бесконечно близки одна къ другой, то мы, пренебрегая малыми высшихъ порядковъ, можемъ принять A за центръ вра - шенія части бруса $A A_1$).

Вслѣдствіе вращенія, точка A_1 описываетъ дугу $A_1 A_1' = A_1 A \cdot \Delta d\varphi$, проекція которой будутъ:

$$\left. \begin{aligned} \text{на ось } X \text{ отв } \overset{\curvearrowright}{A_1 A_1'} \cdot \cos \alpha &= A_1 A_1' \cos \alpha \cdot \Delta dy = (y - y_1) \Delta dy \\ \text{на ось } Y \text{ отв } \overset{\curvearrowright}{A_1 A_1'} \cdot \sin \alpha &= A_1 A_1' \sin \alpha \cdot \Delta dy = (x - x_1) \Delta dy \end{aligned} \right\} |i|$$

Первая проекция представляет собой величину, на которую изменяется |увеличивается| расстояние $[x_2 - x_1]$ между точками A_2 и A_1 вследствие изгиба одного элемента бруса; поэтому отъ вліянія изгиба всѣхъ элементовъ бруса расстояние $[x_2 - x_1]$ получитъ измѣненія:

$$\begin{aligned} \Delta(x_2 - x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} (y - y_1) \Delta dy = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (y - y_1) \frac{M}{E \cdot J} \cdot ds \quad | \text{ см. ур. д. } | \end{aligned}$$

или

$$\Delta(x_2 - x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \cdot y - y_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \quad \dots |k|$$

Точно также вторая проекция дуги $\overset{\curvearrowright}{A_1 A_1'}$ + $-(x - x_1) \Delta dy$ выражаетъ собой измѣненіе |уменьшеніе| расстоянія $[y_2 - y_1]$ между точками A_1 и A_2

по оси y - ось вследствие изгиба элемента длиной ds ; отъ изгиба же всего бруса расстояние $y_2 - y_1$, получить приращение |уменьшение|

$$\Delta(y_2 - y_1) = - \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) \Delta d\varphi = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} (x - x_1)$$

или

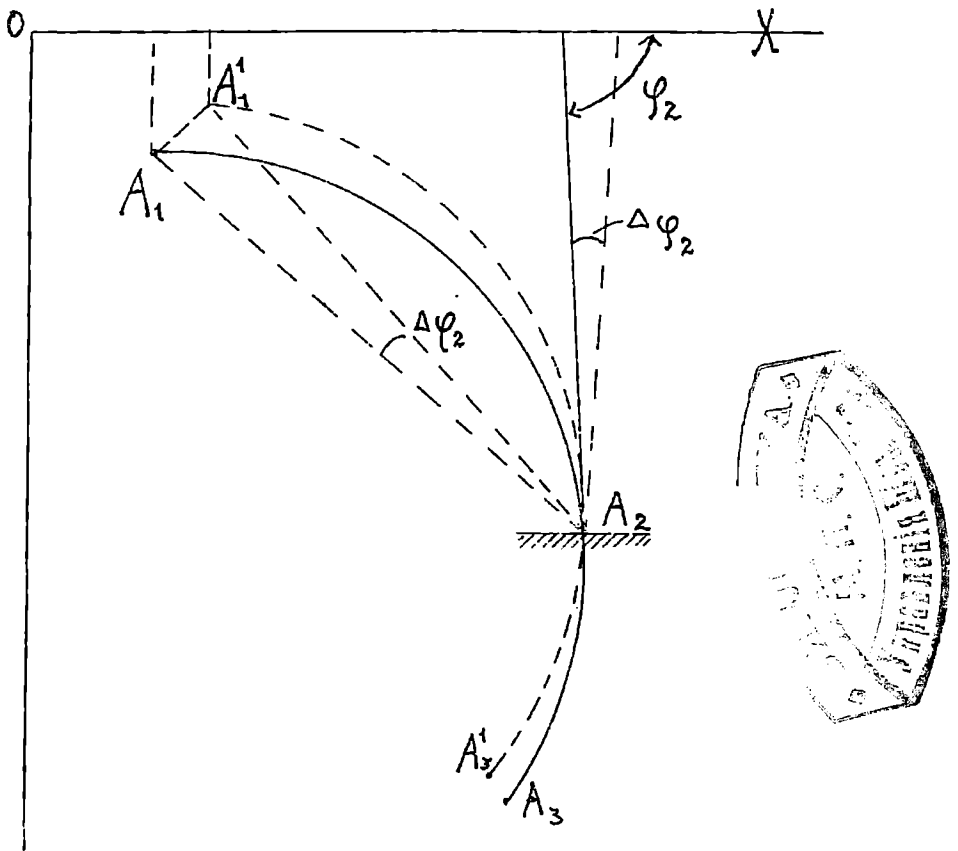
$$\Delta(y_2 - y_1) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} x + x_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \dots |л|$$

Наконецъ для измѣненія угла $\varphi_2 - \varphi_1$, между сѣченіями или касательными въ точкахъ A_1 и A_2 найдемъ

$$\Delta(\varphi_2 - \varphi_1) = \int_{x_1}^{x_2} \Delta d\varphi = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \dots |м|$$

Выше мы предполагали при выводѣ формулъ, что конецъ бруса A_2 - неподвиженъ; если же онъ измѣняетъ свое положеніе на уголъ $\Delta\varphi_2$ |фиг. 23|, то весь брусъ, какъ твердое тѣло повернется на этотъ же уголъ вокругъ точки A_2 при этомъ |подобно предыдущему вліянію $\Delta d\varphi$ | расстояние $(x_2 - x_1)$ уменьшится на $(y_2 - y_1) \cdot \Delta\varphi_2$, такъ что приращеніе

Фиг. 23.



$$\Delta(x_2 - x_1) = -(y_2 - y_1) \Delta\varphi_2 \quad \dots |н|$$

а расстояние $(y_2 - y_1)$ увеличится на $(x_2 - x_1) \Delta\varphi_2$;
следовательно

$$\Delta(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1) \Delta\varphi_2 \quad \dots |о|$$

Если бы точка A_2 имела еще поступательное перемещение, то оно сопровождалось бы таким же пере-

ищеніемъ всѣхъ точекъ бруса, какъ неизмѣняемаго твердаго тѣла и потому, съ достаточной точностью, можно допустить, что это перемѣненіе неизмѣнитъ разстояній $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ и угла $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Складывая результаты вліянія пары силъ M , продольной силы N и вращенія на уголь $\Delta \varphi_2$ получимъ слѣдующія основныя формулы для деформациі кривого бруса.

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\varphi_2 - \varphi_1) &= \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cdot dy}{E \cdot \omega} \\ \Delta(x_2 - x_1) &= \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} y - y_1 \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cdot dx}{E \cdot \omega} - (y_2 - y_1) d\varphi_2 \\ \Delta(y_2 - y_1) &= - \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} x + x_1 \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cdot dy}{E \cdot \omega} + (x_2 - x_1) d\varphi_2 \end{aligned} \right\} \text{III}$$

Если конецъ бруса A_2 неподвиженъ, то

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\varphi_2 - \varphi_1) &= \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cdot dy}{E \cdot \omega} \\ \Delta(x_2 - x_1) &= - \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} y_2 - y_1 \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cdot dx}{E \cdot \omega} \\ \Delta(y_2 - y_1) &= - \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} x_2 + x_1 \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cdot dy}{E \cdot \omega} \end{aligned} \right\} \text{IV}$$

Въ большинствѣ случаевъ, какъ это было указано выше, можно пренебрегать вліяніемъ продольной силы N на деформаци бруса, тогда основныя уравненія примутъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\varphi_2 - \varphi_1) &= \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \\ \Delta(x_2 - x_1) &= \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} y_2 - y_1 \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \\ \Delta(y_2 - y_1) &= \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} x_2 + x_1 \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \end{aligned} \right\} \text{V}$$

Если бы начало координат $| O |$ было бы взято со впадающимъ съ точкой A_2 , т.е. x_2 и y_2 равнялись бы нулю, то, обозначая вообще приращение координатъ точки A_1 черезъ Δx_1 , Δy_1 и $\Delta \varphi_1$, получимъ

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \\ \Delta x_1 &= - \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} y + y_1 \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \\ \Delta y_1 &= \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} x - x_1 \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} \end{aligned} \right\} \text{Уа}$$

Только что выведенныя формулы могутъ быть получены еще и инымъ путемъ. Для всесторонняго изслѣдованія, изучаемаго вопроса и во избѣжаніе излишнихъ повтореній мы применимъ этотъ „иной“ путь къ выводу уравненій для деформациі брусевъ значительной кривизны. Здѣсь же замѣтимъ, что интегралы въ выше приведенныхъ уравненіяхъ должны быть взяты между предѣлами, соответственными взятымъ точкамъ оси бруса.

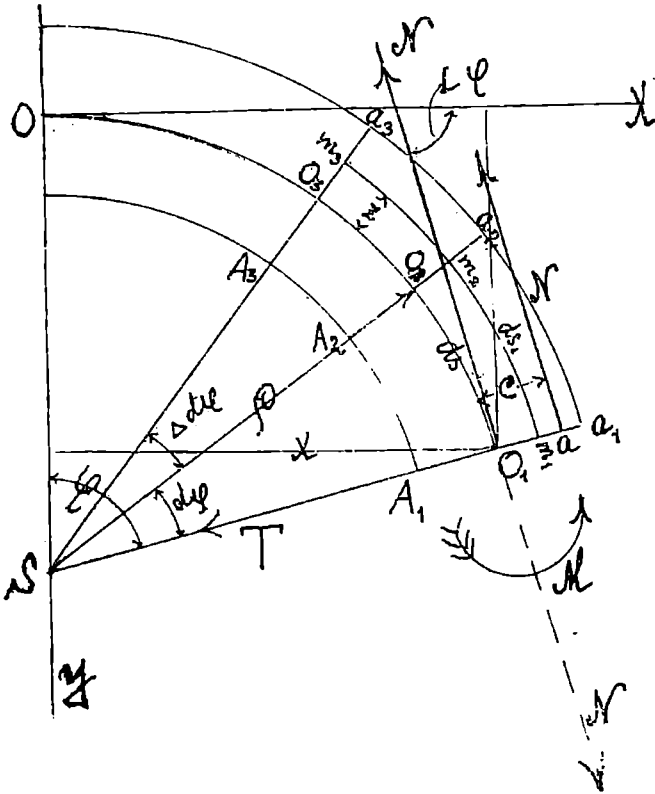
Изъ приведенныхъ основныхъ уравненій деформациі кривого бруса легко могутъ быть выведены добавочныя уравненія упругости, которыя вмѣстѣ съ основными уравненіями Статики, дадутъ возможность разрѣшить цѣлый циклъ задачъ какъ на статически - неопредѣлимыхъ арочныхъ фермахъ, такъ и вообще на статически - неопре-

дѣлимыя, сплошныя арочныя и сродчатая покрытія. Дѣйствительно, приложивъ, на примѣръ, введенныя основныя уравненія къ задѣланнымъ концамъ арки и, принявъ во вниманіе условія ихъ задѣлки, мы получимъ сейчасъ же добавочныя уравненія, дающія возможность опредѣлить статически неопредѣлимыя опорныя реакціи. Опредѣливъ же опорныя реакціи, мы будемъ имѣть всѣ необходимыя данныя для того, чтобы, пользуясь основными уравненіями Статики, опредѣлить въ каждой точкѣ оси арки усилія, дѣйствующія на нее, какъ то: величину изгибающаго момента, величины продольной $|N|$ и поперечной $|T|$ силъ. Нижеприведенные примѣры (пункт. 16) вполне могутъ уяснить только что сказанное, теперь же перейдемъ къ выводу уравненій деформаціи для брусьевъ значительной кривизны.

14 | БРУСЬЯ ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ | БОЛЬШОЙ | КРИВИЗНЫ. Рассмотримъ теперь (фиг. 24) кривой брусъ, радіусъ кривизны ρ котораго не великъ и опредѣлимъ вліяніе продольной силы N и изгибающаго момента M на напряженіе въ какомъ либо сѣченіи. Въ предыдущихъ выводахъ мы предполагали поперечные размѣры брусьевъ малыми по сравненію съ радіусомъ кривизны оси и допускали, что нормальныя напряженія при изгибѣ распредѣляются по поперечнымъ сѣченіямъ также, какъ и въ случаѣ призматическихъ брусьевъ т.е. по линейному закону. Для призматическихъ брусьевъ такой законъ рас-

предѣленія нормальныхъ напряженій является слѣдстві-

фиг. 24.



емъ гипотезы плоско -
сѣчныхъ, со -
гласно которой попе -
речныя сѣченія призм -
атического бруса
при изгибѣ остаются
плоскими и нормаль -
ными къ изогнутой
оси бруса. Легко по -
казать, что въ слу -
чаяхъ кривыхъ брусъ -
евъ гипотеза плоскихъ
сѣченій приведетъ
насъ къ распределе -

нію нормальныхъ напряженій, отличныхъ отъ линейна -
го. При малой кривизнѣ это отличие не велико и можно
считать, что линейный законъ распределенія напряже -
ній совпадаетъ съ гипотезой плоскихъ сѣченій.

При большой кривизнѣ, когда поперечные размѣры
бруса нельзя считать малыми по сравненію съ радиусомъ
кривизны, отклоненія отъ линейнаго закона въ распре -
деленіи напряженій, весьма значительно и приходится
выбирать между гипотезой плоскихъ сѣченій и гипоте -
зой линейнаго закона распределенія нормальныхъ напря -
женій. Необходимо отмѣтить, что вообще вопросъ о рас -

предѣленіи напряженій при изгибѣ кривого бруса не разработанъ окончательно въ теоріи упругости, рѣшена лишь задача, о плоской деформациі бруса съ круговой осью. Это рѣшеніе показываетъ, что въ случаѣ чистаго изгиба сѣченія кругового бруса съ круговой осью остаются плоскими. Въ другихъ случаяхъ дѣйствія силы сѣченія искривляются, но все же получаемыя для напряженій величины ближе къ тѣмъ, что даетъ гипотеза плоскихъ сѣченій и поэтому мы будемъ придерживаться этой гипотезы при изученіи изгиба кривыхъ брусевъ, поперечные размѣры которыхъ нельзя считать малыми по сравненію съ радіусомъ кривизны.

Пусть $A_1 a_1 A_2 a_2$ элементъ бруса |фиг. 24|, заключенный между двумя смежными сѣченіями $A_1 a_1$ и $A_2 a_2$ равстояніе между которыми по оси бруса $O_1 O_2 = dl$

Продольная сила N , приложенная въ центрѣ тяжести O_1 , производитъ равномерное напряженіе $\frac{N}{\omega}$ во всѣхъ точкахъ сѣченія, вслѣдствіе котораго различныя волокна $A_1 A_2, O_1 O_2$ и т.д. получаютъ приращенія, пропорціональныя ихъ длинѣ. Отсюда слѣдуетъ, что точки плоскости $A_1 O_1 a_1$ послѣ деформациі бруса будутъ так же лежать въ нѣкоторой другой плоскости, проходящей черезъ тотъ же центръ кривизны S . Такимъ образомъ отъ вліянія продольной силы кривизна элемента $O_1 O_2$ не измѣняется, а уголъ $d\varphi = \angle O_1 S O_2$ получаетъ приращеніе $\angle O_2 S O_3$, которое по малости можно принять

равнымъ:

$$\Delta dy = \frac{O_2 O_3}{S O_1} = \frac{O_2 O_3}{S O_2} =$$

$$= \frac{\frac{N \cdot ds}{\epsilon \cdot \omega}}{\rho} = \frac{N}{\epsilon \cdot \omega} \cdot \frac{ds}{\rho} \quad |a|$$

гдѣ черезъ ρ - обозначенъ радиусъ кривизны оси бруса у рассматриваемой точки O_1 или O_2 .

Опредѣлимъ теперь вліяніе на элементъ $O_1 O_2$ изгибающаго момента M равнаго моменту $\{ N \cdot e \}$ - пары силъ, полученной

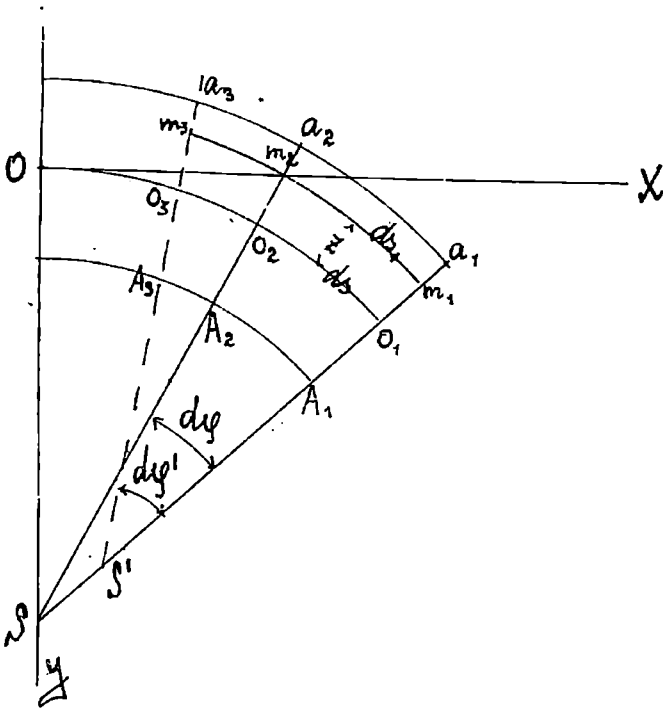
Фиг. 25.

отъ переноса продольной силы N изъ точки ея приложенія $|a|$ въ центръ тяжести сѣченія, O_1 . Пусть элементу ds оси бруса до деформациі его соотвѣтствуетъ радиусъ кривизны ρ и уголъ смежности dy , такъ что

$$ds = \rho \cdot dy$$

послѣ же деформациі

. Тогда относительное



|фиг. 25| $ds' = \rho' dy'$

удлинение i_0 элемента оси ds равно.

$$i_0 = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{ds'}{ds} - 1$$

$$\text{или} \left. \begin{aligned} \frac{ds'}{ds} &= 1 + i_0 \\ ds' &= (1 + i_0) ds \end{aligned} \right\} \dots |a|.$$

Для волокна ds_1 , на расстоянии z отъ оси бруса до деформации имѣемъ:

$$ds_1 = (\rho + z) d\varphi = (\rho + z) \frac{ds}{\rho} = \left(1 + \frac{z}{\rho}\right) ds$$

а послѣ деформации

$$\begin{aligned} ds'_1 &= (\rho' + z) d\varphi' = (\rho' + z) \cdot \frac{ds'}{\rho'} = \\ &= \left(1 + \frac{z}{\rho'}\right) ds' = \left(1 + \frac{z}{\rho'}\right) (1 + i_0) ds \end{aligned}$$

Поэтому удлинение i волокна ds_1 равно

$$i = \frac{ds_1' - ds_1}{ds_1} = \frac{\left(1 + \frac{z}{\rho_1}\right)(1 + i_0) ds - \left(1 + \frac{z}{\rho}\right) ds}{\left(1 + \frac{z}{\rho}\right) ds} =$$
$$= \frac{1 + \frac{z}{\rho_1} + i_0 + \frac{z}{\rho_1} i_0 - 1 - \frac{z}{\rho}}{\left(1 + \frac{z}{\rho}\right)}$$

Для лучшего преобразования формулы для i прибавимъ и отнимемъ въ числитель величину $\frac{i_0 \cdot z}{\rho}$, тогда

$$i = \frac{\left(i_0 + \frac{i_0 z}{\rho}\right) + \left(\frac{z}{\rho_1} - \frac{z}{\rho}\right) + \left(\frac{z i_0}{\rho_1} - \frac{i_0 z}{\rho}\right)}{1 + \frac{z}{\rho}} =$$
$$= i_0 + \frac{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right) (1 + i_0) z}{1 + \frac{z}{\rho}}$$

или

$$i = i_0 + \frac{z}{1 + \frac{z}{\rho}} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right) (1 + i_0)$$

Напряженіе элемента ds_1 , на единицу площади равно:

$$n = \mathcal{E} \cdot i = \mathcal{E} \cdot i_0 + \\ + \frac{z^2}{1 + \frac{z}{\rho}} \cdot \mathcal{E} (1 + i_0) \left(\frac{1}{\rho^1} - \frac{1}{\rho} \right) \dots |B|$$

Взявъ моментъ всѣхъ элементарныхъ силъ и приравнявъ его M найдемъ

$$M = \int n d\omega \cdot z = \mathcal{E} \cdot i_0 \int d\omega z + \\ + \mathcal{E} (1 + i_0) \left(\frac{1}{\rho^1} - \frac{1}{\rho} \right) \int \frac{z^2 \cdot d\omega}{1 + \frac{z}{\rho}}$$

Но по свойству центра тяжести $\int d\omega z$, какъ статическій моментъ, равенъ нулю; обозначая поэтому величину

$$\int \frac{z^2 d\omega}{1 + \frac{z}{\rho}} = J^1 \dots \dots |r|$$

получимъ, что

$$M = E (1 + i_0) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \cdot J^1$$

откуда

$$E (1 + i_0) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) = \frac{M}{J^1} \quad \dots |д|$$

и следовательно

$$n = E i_0 + \frac{M}{J^1} \cdot \frac{x}{1 + \frac{x}{\rho}} \quad \dots |д, |$$

Въ предыдущихъ выводахъ не надо забывать, что разстояніе x отсчитывается отъ нейтральной оси. Въ кривыхъ брускахъ нейтральная ось будетъ проходить черезъ центръ тяжести поперечнаго сѣченія. следовательно въ рассматриваемомъ случаѣ, при изгибѣ парой силъ или моментомъ M , сумма всехъ нормальныхъ усилій, дѣствующихъ на плоскость поперечнаго сѣченія, должна равняться нулю, т.е.

$$0 = \int n dw = \int E i_0 dw + \frac{M}{J^1} \int \frac{x dw}{1 + \frac{x}{\rho}} =$$

$$= \varepsilon i \omega + \frac{M}{\gamma^1} \int \frac{z \, d\omega}{1 + \frac{z}{\rho}} + \frac{M}{\gamma^1} \int \frac{\frac{z^2}{\rho} \cdot d\omega}{1 + \frac{z}{\rho}} - \frac{M}{\gamma^1} \int \frac{\frac{z^2}{\rho} \, d\omega}{1 + \frac{z}{\rho}} =$$

$$= \varepsilon i \omega + \frac{M}{\gamma^1} \int \frac{z + \frac{z^2}{\rho}}{1 + \frac{z}{\rho}} \, d\omega - \frac{M}{\gamma^1 \rho} \int \frac{z^2 \, d\omega}{1 + \frac{z}{\rho}} =$$

$$= \varepsilon i \omega + \frac{M}{\gamma^1} \int z \, d\omega - \frac{M}{\gamma^1 \rho} \int \frac{z^2 \, d\omega}{1 + \frac{z}{\rho}}$$

но

$$\int z \, d\omega = 0; \quad \int \frac{z^2 \, d\omega}{1 + \frac{z}{\rho}} = \gamma^1$$

следовательно

$$0 = \varepsilon i \omega - \frac{M}{\rho} \quad \text{откуда}$$

$$\varepsilon i = \frac{M}{\omega \rho} \dots | \circ |$$

Такимъ образомъ моменту M соответствуетъ напряженіе

$$n = \varepsilon i_0 + \frac{M}{\gamma^1} \cdot \frac{z}{1 + \frac{z}{\rho}} =$$

$$= \frac{M}{\rho \omega} + \frac{M}{\gamma^1} \cdot \frac{z}{1 + \frac{z}{\rho}} \dots \dots |z|$$

При совмѣстномъ дѣйствіи продольной силы N и момента M напряженіе выражается

$$n_1 = \frac{N}{\omega} + \frac{M}{\rho \omega} + \frac{M}{\gamma^1} \cdot \frac{z}{1 + \frac{z}{\rho}} \dots \dots |z|$$

Углу $d\varphi$ соответствуетъ приращеніе отъ вліянія продольной силы |см. ур. а|

$$\Delta d\varphi = \frac{N \cdot ds}{\varepsilon \omega \cdot \rho}$$

а отъ вліянія момента M

$$\Delta d\varphi = d\varphi^1 - d\varphi = \frac{ds^1}{\rho^1} - \frac{ds}{\rho} =$$

$$= \frac{ds(1+i_0)}{\rho^1} - \frac{ds}{\rho} = ds \left(\frac{1}{\rho^1} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{ds}{\rho^1} i_0$$

Прибавимъ и вычтемъ для преобразования по величинѣ

$$\frac{ds \cdot i_0}{\rho}$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta d\varphi &= ds \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{ds \cdot i_0}{\rho'} - \frac{ds \cdot i_0}{\rho} + \frac{ds \cdot i_0}{\rho} = \\ &= ds \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) + ds \cdot i_0 \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{ds \cdot i_0}{\rho} \end{aligned}$$

или

$$\Delta d\varphi = ds \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) (1 + i_0) + \frac{ds \cdot i_0}{\rho}$$

но на основаніи равенства $|d|$ - величина

$$\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) (1 + i_0) = \frac{dh}{\mathcal{J} \cdot \varepsilon}$$

а по равенству $|e|$

$$i_0 = \frac{dh}{\varepsilon \cdot \omega \rho}$$

следовательно

$$\Delta dy = \frac{M \cdot ds}{J' \cdot \varepsilon} + \frac{M \cdot ds}{\varepsilon \cdot \omega \rho^2} \dots |i|$$

Окончательно Δdy , отъ совместнаго дѣйствія продольной силы N и момента M , будетъ равно суммѣ ихъ дѣйствій т.е.

$$\begin{aligned} \Delta dy &= \frac{N \cdot ds}{\varepsilon \cdot \omega \rho} + \frac{M \cdot ds}{\varepsilon \cdot J'} + \frac{M \cdot ds}{\varepsilon \cdot \omega \rho^2} = \\ &= \left[\frac{M}{\varepsilon \cdot J'} + \frac{M}{\varepsilon \cdot \omega \rho^2} + \frac{N}{\varepsilon \cdot \omega \rho} \right] \cdot ds \dots |к| \end{aligned}$$

Слѣдовательно изменение Δy въ предѣлахъ отъ 0 до φ будетъ равно |см. фиг. 24 или 25|

$$\Delta y = \int \left[\frac{M}{\varepsilon \cdot J'} + \frac{M}{\varepsilon \cdot \omega \rho^2} + \frac{N}{\varepsilon \cdot \omega \rho} \right] ds \dots |л|$$

Опредѣлимъ теперь приращенія координатъ Δx и Δy . Для означенной цѣли мы могли бы пользоваться уже изложеннымъ въ пунктѣ 13 приемомъ, но, какъ было сказано выше, мы здѣсь примемъ иной приемъ для полученія

приращеній координатъ Δx и Δy . Пусть, согласно фиг. 24, кривой брусъ отнесенъ къ координатнымъ осямъ

Oxy и рассмотримъ сѣченіе, соответственное какой нибудь точки O_1 оси бруса, съ координатами x и y и угломъ φ , составляемымъ касательной съ осью $X^{обг}$ или, что то же, сѣченіемъ A_1a_1 съ осью y овз.

Смежному элементу $O_1O_2 = ds$ будутъ соответствовать пре-
вращеніямъ.

$$dx = ds \cos \varphi$$

$$dy = ds \sin \varphi$$

и уголъ смежности $d\varphi$. После дѣйствія внешнихъ силъ на брусъ всѣ перечисленныя величины

$$x, y, \varphi, \sin \varphi, \cos \varphi, ds, dx, dy, \text{ и } d\varphi$$

получаютъ весьма малыя приращенія

$$\Delta x, \Delta y, \Delta \varphi, \Delta \sin \varphi = \cos \varphi \Delta \varphi,$$

$$\Delta \cos \varphi = -\sin \varphi \Delta \varphi, \Delta ds, \Delta dx, \Delta dy, \Delta d\varphi$$

которыя могутъ быть опредѣлены, какъ дифференціалы, со-

отвѣтствующіе измѣненію величины внѣшнихъ силъ отъ нуля до данныхъ значеній. При этомъ уравненія

$$dx = ds \cdot \cos \varphi$$

$$dy = ds \cdot \sin \varphi$$

обратятся въ

$$dx + \Delta dx = (ds + \Delta ds) (\cos \varphi - \sin \varphi \Delta \varphi)$$

$$dy + \Delta dy = (ds + \Delta ds) (\sin \varphi + \cos \varphi \Delta \varphi)$$

Откуда, вычитая предыдущія уравненія и пренебрегая произведеніемъ $\Delta ds \cdot \Delta \varphi$ находимъ

$$\begin{aligned} \Delta dx &= \Delta ds \cdot \cos \varphi - \Delta \varphi ds \cdot \sin \varphi = \frac{\Delta ds}{ds} ds \cdot \cos \varphi - \Delta \varphi ds \cdot \sin \varphi = \\ &= \left. \begin{aligned} &= \frac{\Delta ds}{ds} \cdot dx - \Delta \varphi \cdot dy \end{aligned} \right\} |M| \\ \Delta dy &= \Delta ds \cdot \sin \varphi + \Delta \varphi ds \cdot \cos \varphi = \frac{\Delta ds}{ds} dy + \Delta \varphi \cdot dx \end{aligned}$$

Искомые приращенія будутъ равны

$$\Delta x = - \int \Delta \varphi dy + \int \frac{\Delta ds}{ds} dx \dots |N|$$

$$\Delta y = + \int \Delta \varphi dx + \int \frac{\Delta ds}{ds} dy \quad \dots |o|$$

Но относительное изменение $\frac{\Delta ds}{ds}$ длины элемента ds , какъ было уже выяснено, будетъ равно суммѣ относительныхъ изменений: отъ продольной силы N , равное $\frac{N}{E \cdot \omega}$ и отъ момента M , равное по ур | e | - i. = $\frac{M}{\rho \cdot \omega \cdot r}$

Слѣдовательно

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{E \cdot \omega} + \frac{M}{E \cdot \omega \cdot \rho} \quad \dots |п|$$

а потому уравненія |н| и |o| примутъ видъ

$$\Delta x = - \int \Delta \varphi dy + \int \frac{M \cdot dx}{E \cdot \omega \cdot \rho} + \int \frac{N dx}{E \cdot \omega} \quad \dots |р|$$

$$\Delta y = \int \Delta \varphi dx + \int \frac{M \cdot dy}{E \cdot \omega \cdot \rho} + \int \frac{N dy}{E \cdot \omega} \quad \dots |с|$$

Сводя все въ одну систему, получимъ окончательно слѣдующія три уравненія для опредѣленія деформаций кри -

вого бруса, значительной кривизны,

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi &= \int \frac{M \cdot ds}{E J^1} + \int \frac{M \cdot ds}{E \omega \rho^2} + \int \frac{N \cdot ds}{E \omega \rho} \\ \Delta x &= - \int \Delta \varphi dy + \int \frac{M \cdot dx}{E \omega \rho} + \int \frac{N \cdot dx}{E \omega} \\ \Delta y &= \int \Delta \varphi dx + \int \frac{M \cdot dy}{E \omega \rho} + \int \frac{N \cdot dy}{E \omega} \end{aligned} \right\} \text{VI}$$

Что же касается значения интеграла | см. равенство 2 |

$$J^1 = \int \frac{z^2 dz}{1 + \frac{z}{\rho}}$$

то оно может быть точно найдено только для простейших сечений - прямоугольного и трапециoidalного. В большинстве же случаев значение J^1 вычисляются интегрированием членов ряда, получаемого разложением

подынтегральной фракціи

$$J' = \int \frac{z^2 \cdot dw}{1 + \frac{z}{\rho}} =$$
$$= \int z^2 \left[1 - \frac{z}{\rho} + \frac{z^2}{\rho^2} - \frac{z^3}{\rho^3} + \dots \right] dw \dots \text{ |VIII|}$$

который для сѣченій, симметрическихъ относительно главныхъ осей инерціи, замѣняется рядомъ

$$J' = \int z^2 \left[1 + \frac{z^2}{\rho^2} + \frac{z^4}{\rho^4} + \dots \right] dw \dots \text{ |VIII|}$$

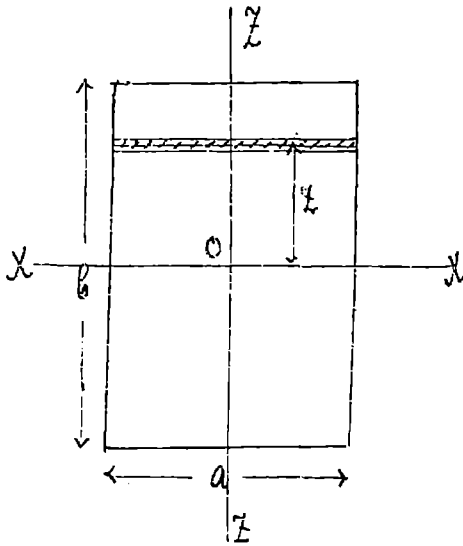
Въ случаяхъ сложныхъ сѣченій величину J' предпочтительно опредѣлять непосредственно, разбивая сѣченіе на элементарныя полоски $a \cdot \Delta z$ и вычисляя сумму

$$\sum \frac{z^2}{1 + \frac{z}{\rho}} \cdot a \cdot \Delta z$$

графическими способами, предложенными для моментовъ

инерціи.

ПРЯМОУГОЛЬНОЕ СЪЧЕНІЕ. Обозначимъ черезъ b - высоту, а черезъ a - основа -
 фиг. 26.



соту, а черезъ a - основа -
 ніе прямоугольнаго сѣченія
 |фиг. 26| и кромѣ того при-
 равняемъ отношеніе $\frac{z}{\rho}$ къ ра-
 діусу кривизны ρ значенію
 v . Тогда имѣемъ:

$$dw = a \cdot dz \quad \text{и}$$

$$J^1 = \int \frac{z^2 dw}{1 + \frac{z}{\rho}} = \int \frac{z^2 \cdot a dz}{1 + \frac{z}{\rho}} = \int \frac{z^2 \cdot \rho \cdot a \cdot \frac{dz}{\rho}}{1 + \frac{z}{\rho}}$$

или

$$J^1 = a\rho \int \frac{z^2 \cdot d\left(\frac{z}{\rho}\right)}{1 + \frac{z}{\rho}}$$

умножимъ и раздѣлимъ числителя подынтегральной дроби
 на ρ^2 , тогда

$$J^1 = a\rho^3 \int \frac{\frac{x^2}{\rho^2} \cdot d\left(\frac{x}{\rho}\right)}{1 + \frac{x}{\rho}} =$$

$$= a\rho^3 \int \frac{v^2 \cdot dv}{1+v} = a\rho^3 \left\{ \int \frac{v^2-1}{v+1} dv + \int \frac{dv}{1+v} \right\}$$

или

$$J^1 = a\rho^3 \left\{ \frac{1}{2}v^2 - v + \lg(v+1) \right\}$$

или подставляя значеніе

$$v = \frac{x}{\rho} \quad \text{получимъ}$$

$$J^1 = a\rho^3 \left\{ \frac{1}{2} \frac{x^2}{\rho^2} - \frac{x}{\rho} + \lg\left(\frac{x}{\rho} + 1\right) \right\}$$

Пределы интегрирования для x будутъ

$$\left(+\frac{b}{2}\right) \text{ и } \left(-\frac{b}{2}\right)$$

следовательно

$$\begin{aligned}
 \gamma^1 &= a\rho^3 \left\{ \frac{1}{2} \frac{z^2}{\rho^2} - \frac{z}{\rho} + \lg\left(\frac{z}{\rho} + 1\right) \right\}_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \\
 &= a\rho^3 \left\{ \frac{1}{8} \frac{b^2}{\rho^2} - \frac{b}{2\rho} + \lg\left(\frac{b}{2\rho} + 1\right) - \frac{1}{8} \frac{b^2}{\rho^2} - \frac{b}{2\rho} - \right. \\
 &\left. - \lg\left(1 - \frac{b}{2\rho}\right) \right\} = a\rho^2 \left\{ \rho \lg \frac{2\rho + b}{2\rho - b} - b \right\} \dots |IX|
 \end{aligned}$$

Разлагая $\lg \frac{2\rho + b}{2\rho - b}$ в ряд найдем

$$\gamma^1 = \frac{1}{12} a b^3 \left\{ 1 + \frac{3b^2}{20\rho^2} + \frac{3b^4}{112\rho^4} + \dots \right\} \dots |X|$$

Если радиус ρ кривизны великъ сравнительно съ h , то

$$J' = \frac{1}{12} a b^3 \quad \text{моменту инерции } J$$

| | | | | |
|----------------|---------|---------|---------|-----------|
| при $\rho = h$ | $2h$ | $3h$ | $4h$ | $5h$ |
| $J' = 1,153 J$ | $1,038$ | $1,017$ | $1,009$ | $1,006 J$ |

Отыщемъ теперь максимумъ и минимумъ напряжений для прямоугольнаго сѣченія т.е. при $x = \pm \frac{b}{2}$

Обозначая эксцентриситетъ продольной силы N через e |см. фиг. 24|, мы знаемъ, что $N' = N \cdot e$

Тогда согласно уравн. | в | получимъ

$$\max N_1 = \frac{N}{ab} + \frac{N \cdot e}{ab \cdot \rho} + \frac{N \cdot e \cdot \frac{b}{2}}{J' \left(1 + \frac{b}{2\rho}\right)} \dots \text{ |XI|}$$

$$\min N_1 = \frac{N}{ab} + \frac{N \cdot e}{ab \rho} - \frac{N \cdot e \cdot \frac{b}{2}}{J' \left(1 - \frac{b}{2\rho}\right)} \quad \left(\text{ибо } x = -\frac{b}{2}\right) \text{ |XII|}$$

$$\text{Но } \frac{\frac{b}{2}}{J' \left(1 + \frac{b}{2\rho}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{b}{2}}{\left(1 + \frac{b}{2\rho}\right) \cdot \frac{1}{12} a b^3 \left(1 + \frac{3b^2}{20\rho^2} + \frac{3b^4}{112\rho^4} + \dots\right)} = B$$

Непосредственнымъ дѣленіемъ числителя на знаменателя находимъ, что

$$B = \frac{b}{ab^2} \cdot \left(1 - \frac{b}{2\rho} + \frac{b^2}{10\rho^2} - \frac{b^3}{20\rho^3} + \dots \right)$$

и слѣдовательно

$$\begin{aligned} \max N_1 = & \frac{N}{ab} + \frac{Nc}{a \cdot b \rho} + \frac{6Nc}{ab^2} \left\{ 1 - \frac{b}{2\rho} + \right. \\ & \left. + \frac{b^2}{10\rho^2} - \frac{b^3}{20\rho^3} + \dots \right\} = \frac{N}{ab} \left\{ 1 + \frac{6c}{b} + \right. \\ & \left. - \frac{2c}{\rho} + \frac{3cb}{5\rho^2} - \frac{3cb^2}{10\rho^3} + \dots \right\} \dots \text{ [XIII]} \end{aligned}$$

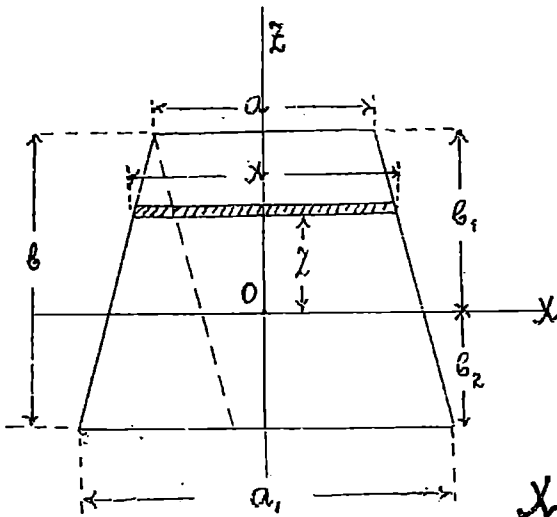
Для значенія $\min N_1$ аналогично найдемъ, что

$$\min N_1 = \frac{N}{ab} + \frac{Nc}{a \cdot b \rho} - \frac{6Nc}{ab^2} \left\{ 1 + \frac{b}{2\rho} + \frac{b^2}{10\rho^2} + \frac{b^3}{20\rho^3} + \dots \right\} =$$

$$= \frac{N}{ab} \left\{ 1 - \frac{6c}{b} - \frac{2c}{\rho} - \frac{3cb}{5\rho^2} - \frac{3cb^2}{10\rho^3} - \dots \right\} \dots \text{XIX}$$

ТРАПЕЦОВИДАЛЬНОЕ СВЧЕНИЕ |Фиг. 27| Рассмотрим

Фиг. 27.



равнобокую трапецию съ высотой b и основаніями - меньшимъ a и большимъ a_1 , при чемъ для краткости обозначимъ

$$\frac{a_1 - a}{b} = m$$

Тогда длина полоски

$$x = a + m(b_1 - z) \quad \text{и}$$

$$d\omega = x \cdot dz = \left[a + m(b_1 - z) \right] dz \quad \text{или}$$

$$d\omega = \left[a + m(b_1 + \rho) - m\rho \left(1 + \frac{z}{\rho} \right) \right] dz$$

Подставляя въ формулу для \mathcal{J} значеніе для $d\omega$ и проведя интегрированіе въ предѣлахъ

$$b_1 = \frac{2a_1 + a}{3(a + a_1)} \cdot b \quad \text{и}$$

$$b_2 = \frac{2a + a_1}{3(a + a_1)} \cdot b \quad \text{получимъ, послѣ}$$

различныхъ преобразованій

$$\begin{aligned} \tilde{J}' = \rho^3 \left[a + m(b_1 + \rho) \right] \lg \frac{\rho + b_1}{\rho - b_2} - \\ - \rho^2 h \left[m\rho + \frac{a_1 + a}{2} \right] \quad \dots | \text{XV} | \end{aligned}$$

ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ И КРУГЛОЕ СВѢЧЕНІЕ |фиг. 28| Для
фиг. 28.

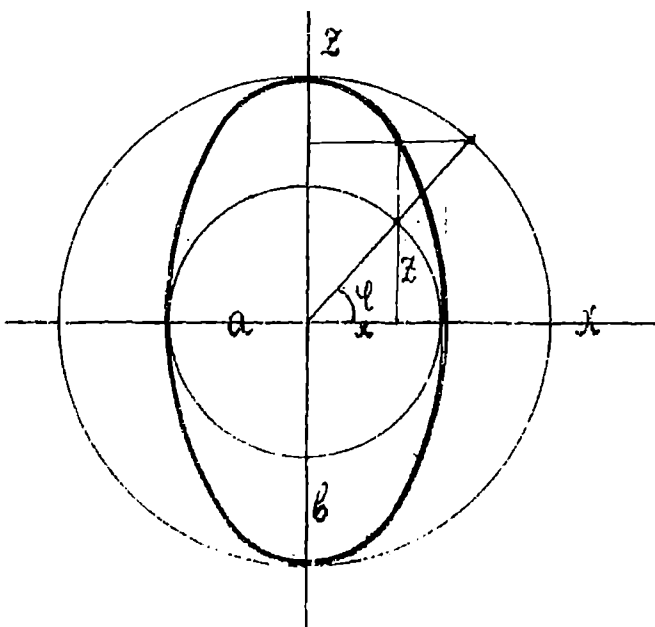
эллиптическаго свѣ-
ченія шириной $2a$ и
высотой $2b$ можно
вмѣсто уравненія

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

написатьъ

$$x = a \cos \varphi \quad "$$

$$z = b \sin \varphi$$



Откуда

$$\begin{aligned} dz &= b \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \quad \text{и} \quad dw = 2x dz = \\ &= 2ab \cos^2 \varphi \cdot d\varphi \end{aligned}$$

Подставляя означенныя значенія въ формулу VIII получимъ

$$y' = 2 \int_0^b z^2 \left[1 + \frac{z^2}{\rho^2} + \frac{z^4}{\rho^4} + \frac{z^6}{\rho^6} + \dots \right]$$

откуда послѣ преобразованій и интегрированія имѣемъ

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\pi a b^3}{4} \left[1 + \frac{b^2}{2\rho^2} + \frac{5b^4}{16\rho^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{7b^6}{32\rho^6} + \dots \right] \dots \text{ |XVI|} \end{aligned}$$

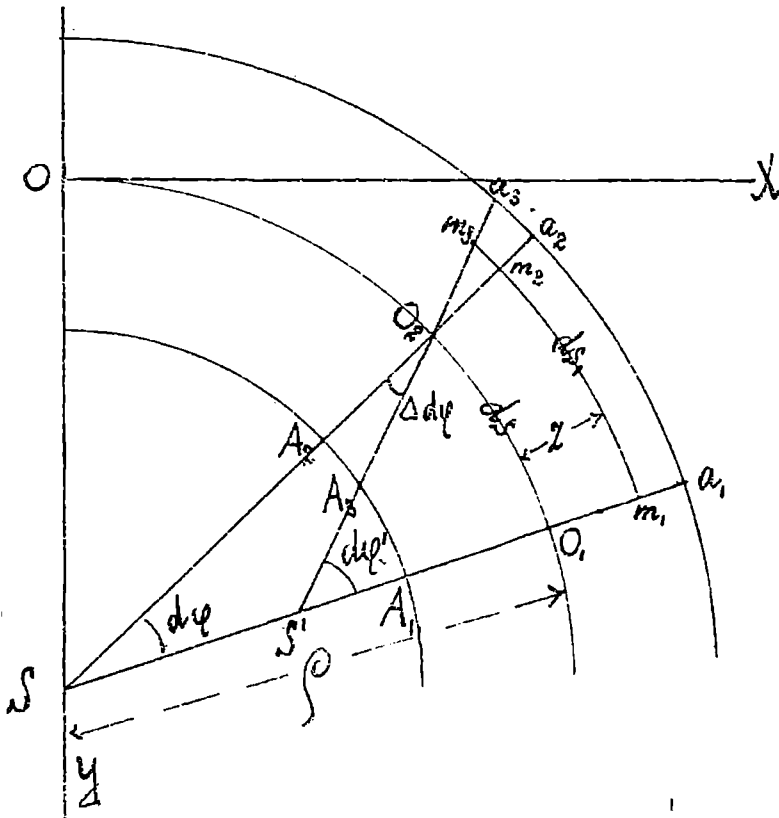
Для круглаго свѣченія $a = b = r$, поэтому

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\pi \cdot r^4}{4} \left[1 + \frac{r^2}{2\rho^2} + \frac{5 \cdot r^4}{16\rho^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{7r^6}{32\rho^6} + \dots \right] \dots \text{ |XVII|} \end{aligned}$$

15| Полученныя въ пунктѣ 14 выводы могутъ быть упрощены, если пренебречь вліяніемъ продольной силы

N на деформациі кривого бруса, а именно: пусть [на фиг. 29] $A_2 a_2 a_1 A_1$ - элементъ кривого бру-

фиг. 29



са, вырѣзанный сѣ-

ченіями $A_2 a_2$ и

$A_1 a_1$. При из-

гибѣ отъ дѣйствія

пары силъ, съ мо-

ментомъ $M = Nc$,

сѣченія $A_2 a_2$ и

$A_1 a_1$ поворачи-

ваются одно отно-

сительно друго-

го. Пусть $A_2 a_2$

положеніе сѣче-

нія $A_2 a_2$ послѣ

деформациі и $O_2 O_1$

волокно лежащее

на нейтральномъ слоеѣ. Длина ds этого волокна при изгибѣ не мѣняется. Обозначимъ черезъ ρ радиусъ кривизны этого волокна до деформациі, а черезъ S соответствующій центръ кривизны.

Послѣ изгиба выдѣленнаго элемента пусть центръ S перемѣстится въ S'' , первоначальный уголъ, смежности $d\varphi$ получитъ приращеніе $\Delta d\varphi = d\varphi' - d\varphi$

Какое либо волокно, отстоящее въ разстояніи Z отъ нейтральнаго слоя удлинится на величину $Z \Delta d\varphi$. Такъ какъ первоначальная длина этого волокна была $d\varphi(\rho + Z)$, то следовательно относительное удлинение его будетъ

$$i = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{Z}{\rho + Z}$$

и соответствующее напряженіе опредѣлится по формулѣ

$$n_1 = \varepsilon i = \varepsilon \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{Z}{\rho + Z} \quad \dots |c|$$

но $d\varphi' = \frac{ds}{\rho'}$ и $d\varphi = \frac{ds}{\rho}$
следовательно

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\varphi' - d\varphi}{d\varphi} = \rho \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \dots |p|$$

а потому

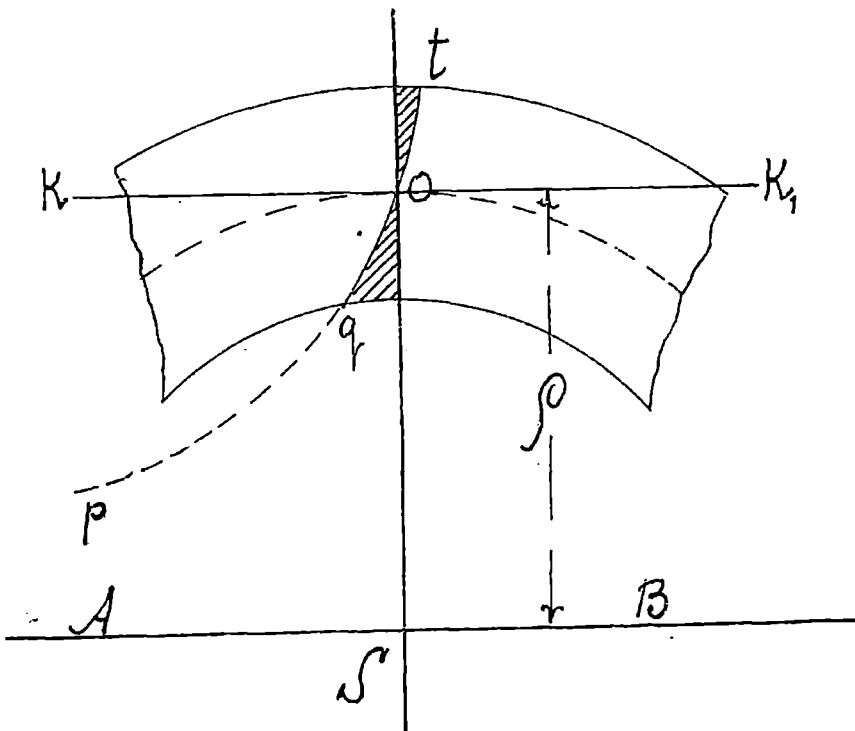
$$L_1 = \varepsilon \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \cdot \frac{\rho Z}{\rho + Z} = \varepsilon \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \cdot \frac{Z}{1 + \frac{Z}{\rho}} \dots |$$

Выраженіе для n_1 можно было бы получить изъ равенства
 в |пун. 14| положивъ $\dot{l}_0 = 0$ ибо при допущеніи, что
 длина средняго волокна не измѣняется,

$$l_0 = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{ds - ds}{ds} = 0 \quad |см. рав. 6|$$

Если вернуться къ формулѣ |с| и положить, что ξ
 по сравненію съ ρ мало, то имъ въ знаменателѣ можно
 пренебречь и мы получимъ линейный законъ распредѣленія
 напряженій. Въ противномъ случаѣ законъ распредѣленія
 будетъ гиперболическій. Если напряженія n_1 откла-
 дывать нормально къ сѣченію, то получимъ отрезокъ tq

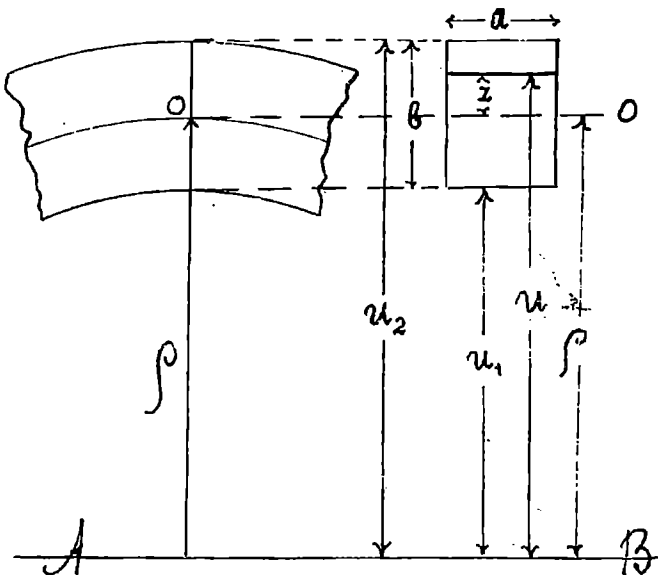
фиг. 30.



гиперболы tqr , имѣющей своей асимптотой прямую AB , проходящую черезъ центръ кривизны и параллельную касательной KK_1 [фиг. 30]. Расстоянія Z въ предыдущихъ выводахъ мы отсчитывали отъ нейтральной линіи. Въ случаѣ кривого бруса нейтральная ось будетъ проходить черезъ центръ тяжести поперечнаго сѣченія и для его опредѣленія нужно воспользоваться тѣмъ обстоятельствомъ, что при изгибѣ парой силъ въ рассматриваемомъ случаѣ сумма всѣхъ нормальныхъ усилій, дѣствующихъ по плоскости поперечнаго сѣченія, должна равняться нулю, слѣдовательно

$$\int n d\omega = \varepsilon \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{z d\omega}{\rho + z} = 0 \quad |y|$$

фиг. 31.



Изъ уравненія $|y|$ для каждаго частнаго случая можетъ быть найдено соответствующее значеніе ρ и тѣмъ опредѣлено положеніе нейтральнаго слоя. Возьмемъ для примѣра, слу-

чай прямогольного поперечнаго сѣченія съ высотой $|v|$ и основаніемъ $|a|$ |фиг. 31|. Для нахождения ρ имѣемъ условіе

$$\int \frac{z \, d\omega}{\rho + z} = \int \frac{b \cdot z \, dz}{\rho + z} = 0 \quad \dots \quad |\Phi|$$

Для удобства вычисленія будемъ отсчитывать разстоянія не отъ нейтральной линіи, а отъ оси AB , проходящей черезъ центръ кривизны. Положимъ $\rho + z = u$ и предѣльныя значенія $|u|$ назовемъ черезъ $|u_1|$ и $|u_2|$.

Тогда условіе $|\Phi|$ переписется въ такомъ видѣ

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{(u - \rho) \, du}{u} = 0 \quad \text{откуда}$$

$$(u_2 - u_1) - \rho \lg \frac{u_2}{u_1} = b - \rho \lg \frac{u_2}{u_1} = 0$$

При заданныхъ значеніяхъ u_2 и u_1 легко найти ρ , а слѣдовательно опредѣлить положеніе нейтральной оси. Подобнымъ же способомъ можно опредѣлить положеніе нейт-

раальной оси при трапецидальномъ, эллиптическомъ и кругломъ сѣченіяхъ. Для нахождения величины напряженій, воспользуемся условіемъ, что моментъ внутреннихъ силъ упругости по величинѣ = изгибающему моменту M .

Слѣдовательно

$$\int n \cdot z \, d\omega = \varepsilon \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{z^2 \, d\omega}{\rho + z} = M$$

или, принимая во вниманіе равенство $|p|$

$$M = \varepsilon \cdot \rho \cdot \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \int \frac{z^2 \, d\omega}{1 + \frac{z}{\rho}}$$

Обозначая какъ и ранѣе

$$\int \frac{z^2 \, d\omega}{1 + \frac{z}{\rho}} = \mathcal{J}'$$

получимъ, что

$$M = \varepsilon \cdot \rho \cdot \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \cdot \mathcal{J}' = \varepsilon \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{\mathcal{J}'}{\rho}$$

Слѣдовательно напряженіе n_1 , на основаніи равенствъ
|с и г| будетъ равно

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{M \rho}{\gamma'} \cdot \frac{z}{\rho + z} \\ \text{или} \\ n_1 &= \frac{M}{\gamma'} \cdot \frac{z}{1 + \frac{z}{\rho}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{[XVIII]}$$

Формулы XVIII могли бытъ получены непосредственно изъ
уравненія |д| |пунк. 14| полагая въ немъ $\dot{c}_0 = 0$

Далѣе, такъ какъ

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M \rho}{\gamma'} \quad \text{то}$$

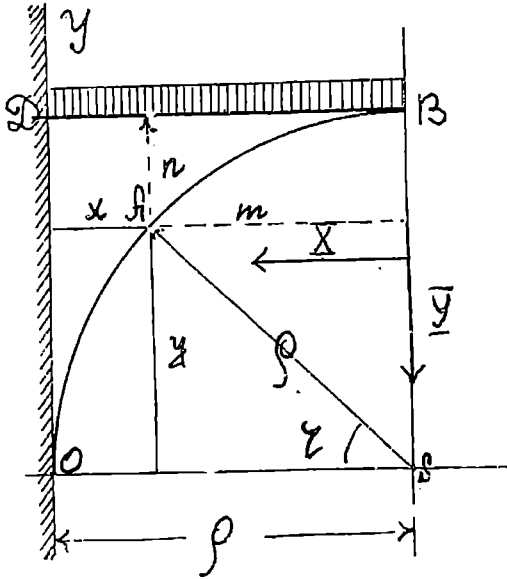
$$\Delta d\varphi = \frac{M \cdot \rho}{\varepsilon \cdot \gamma'} d\varphi =$$

$$= \frac{M \cdot \rho \cdot ds}{\gamma' \rho} = \frac{M \cdot ds}{\gamma' \cdot \varepsilon}$$

Слѣдовательно $\Delta \varphi = \int \frac{M \cdot ds}{\varepsilon \cdot \gamma'}$. . [XIX]

16 | ПРИМЕНЕНІЕ ОСНОВНЫХЪ ФОРМУЛЪ ДЕФОРМАЦІИ КРИВОГО БРУСА МАЛОЙ КРИВИЗНЫ КЪ РЫШЕНІЮ ПРИМѢРОВЪ. П р и м ѣ р ъ I. Металлическій кронштейнъ DB |фиг. 32|, состоящій изъ металлической балки DB прямоугольнаго сѣченія, съ моментомъ инерціи J и изъ кривого бруса, по-робчататаго сѣченія съ моментомъ инерціи J_1 .

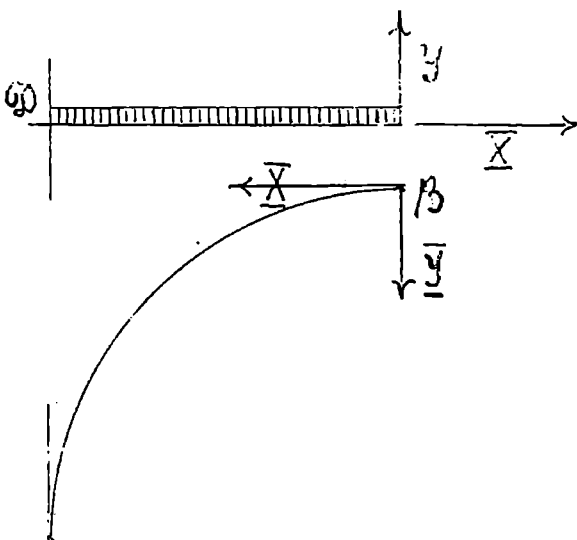
Фиг. 32



Въ точкѣ B шарнирное соединеніе; въ D и O абсолютное закрѣпленіе. Опредѣлить наибольшій изгибающій моментъ для балки и кривого бруса при дѣйствіи равномернаго распределенія нагрузки q . Коэффициентъ упругости E .

Обозначимъ черезъ \bar{X} и \bar{Y} горизонтальную и вертикальную составляющія отъ усилія, передаваемого балкой кривому брусу въ точкѣ B . Тогда получимъ схему дѣйствія усилія въ точкѣ B , изображен-ной на |фиг. 33|.

Фиг. 33.



Фиг. 33.

При дальнейшихъ расчетахъ пренебрежемъ действи-
емъ продольной силы на балку и кривой брусъ.

Въ исходныя уравненія примемъ формулы \bar{V}_a .

Перемѣщеніе конца B кривого бруса отъ дѣйствія
силы Y будутъ

$$\Delta x' = y_1 \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J_1} - \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J_1} y$$

и

$$\Delta y' = -x_1 \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J_1} + \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J_1} x$$

Если взять произвольную точку A (x, y) на бру-
сѣ, то $M = \mathcal{A} \cdot m = Y \cdot \rho \cdot \cos \varphi$; $y_1 = x_1 = \rho$

$$x = \rho - \rho \cos \varphi = \rho (1 - \cos \varphi)$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi$$

$$ds = \rho \cdot d\varphi$$

Тогда

$$\Delta x' = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\bar{y} \cdot \rho \cdot \cos \varphi \cdot \rho \, d\varphi}{\varepsilon \cdot \bar{y}_1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\bar{y} \rho \cdot \cos \varphi \cdot \rho \, d\varphi}{\varepsilon \cdot \bar{y}_1} \rho \sin \varphi$$

III

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{\rho^3 \bar{y}}{\varepsilon \cdot \bar{y}_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi - \frac{\rho^3 \bar{y}}{\varepsilon \cdot \bar{y}_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{\rho^3 \bar{y}}{\varepsilon \cdot \bar{y}_1} \left\{ \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos 2\varphi \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho^3 \bar{y}}{2 \cdot \varepsilon \bar{y}_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y' &= -\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\bar{y} \rho \cdot \cos \varphi \cdot \rho \, d\varphi}{\varepsilon \cdot \bar{y}_1} + \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\bar{y} \rho \cdot \cos \varphi \cdot \rho \, d\varphi}{\varepsilon \cdot \bar{y}_1} \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\bar{y} \rho \cos \varphi \cdot \rho \, d\varphi}{\varepsilon \cdot \bar{y}_1} \rho \cdot \cos \varphi \, d\varphi = -\frac{\bar{y} \rho^3}{\varepsilon \cdot \bar{y}_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

III

$$\Delta y' = - \frac{\bar{y} \rho^3}{\varepsilon \cdot J_1} \left(\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= - \frac{\bar{y} \rho^3}{\varepsilon \cdot J_1} \cdot \frac{\pi}{4}$$

Перемещения конца В кривого бруса отъ силы \bar{X} , если обозначить ихъ черезъ $\Delta x''$ и $\Delta y''$ и принять во вниманіе, что

$$M = - \bar{X} n = - \bar{X} (\rho - \rho \sin \varphi) =$$

$$= - \bar{X} \rho (1 - \sin \varphi)$$

будутъ равны:

$$\Delta x'' = \rho \int_0^{\pi/2} \frac{- \bar{X} \rho (1 - \sin \varphi) \rho d\varphi}{\varepsilon \cdot J_1} =$$

$$-\int_0^{\pi/2} \frac{\bar{X} \rho (1 - \sin \varphi) \rho d\varphi}{\varepsilon \cdot \mathfrak{V}_1} \rho \sin \varphi =$$

$$= -\frac{\bar{X} \rho^3}{\varepsilon \cdot \mathfrak{V}_1} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \varphi) d\varphi + \frac{\bar{X} \rho^3}{\varepsilon \cdot \mathfrak{V}_1} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2} (1 - \sin \varphi) d\varphi = (\varphi + \cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\int_0^{\pi/2} (1 - \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \left\{ -\cos \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \varphi \right\} \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\Delta x'' = -\frac{\bar{X} \rho^3}{\varepsilon \cdot \mathfrak{V}_1} \left\{ \varphi + 2 \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right\} \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{\bar{X} \rho^3}{\varepsilon \cdot \mathfrak{V}_1} \cdot \frac{(3\pi - 8)}{4}$$

$$\Delta y'' = +\rho \int_0^{\pi/2} \frac{\bar{X} \rho (1 - \sin \varphi) \rho d\varphi}{\varepsilon \cdot \mathfrak{V}_1} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{\pi/2} \frac{\bar{X} \rho (1 - \sin \varphi) \rho d\varphi}{\varepsilon \cdot \mathcal{I}_1} \rho (1 - \cos \varphi) = \\
 & = + \frac{\bar{X} \rho^3}{\varepsilon \cdot \mathcal{I}_1} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{\bar{X} \rho^3}{\varepsilon \cdot \mathcal{I}_1} \left\{ \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos 2\varphi \right\}_0^{\pi/2}
 \end{aligned}$$

или

$$\Delta y'' = \frac{\bar{X} \rho^3}{2 \cdot \varepsilon \mathcal{I}_1}$$

Для составления двух уравнений, необходимых для определения \bar{X} и \bar{y} , следует принять во внимание обстоятельство задания, а именно в точке B прямоугольная балка и брус неизменно связаны, следовательно удлинение балки равно приращению $\Delta \bar{X} = \Delta x' + \Delta x''$ кривого бруса. Но так как мы условились пренебрегать действием продольной силы на балку, а удлинение балки и может быть вызвано только продольной силой, то ясно, что $\Delta x = 0$ или

$$\Delta x' + \Delta x'' = 0 \quad \dots |a|$$

Для составления II уравнения нужно принять во внимание

маніе, что въ точкѣ В балка и кривой брусь имѣютъ об-
щій прогибъ, слѣдовательно:

$$\Delta f = -\Delta y = -(\Delta y' + \Delta y'')$$

Прогибъ балки DB, закрѣпленной концомъ D и
загруженной равномерной нагрузкой q и вертикальной
силой Y, приложенной въ точкѣ B и дѣйствующей вверхъ
опредѣлится легко, на основаніи формулъ Сопротивленія
матеріаловъ, а именно:

$$\Delta f = \frac{q l^4}{8 E J} - \frac{\bar{Y} \cdot l^3}{3 \cdot E J}$$

Слѣдовательно второе уравненіе напишется

$$\frac{q l^4}{8 \cdot E J} - \frac{\bar{Y} l^3}{3 \cdot E J} = -(\Delta y' + \Delta y'') \dots |a|$$

Подставляя въ уравненія а и б найденныя значенія
для Δx и Δy получимъ:

$$\frac{l^3 \bar{Y}}{2 \cdot E J_1} - \frac{l^3 \bar{X}}{E J_1} \cdot \frac{(3\pi - 8)}{4} = 0 \dots |a|$$

$$- \left\{ \frac{-\rho^3 \bar{y}}{\varepsilon J_1} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\rho^3 \bar{x}}{2 \cdot \varepsilon J_1} \right\} =$$

$$= \frac{q \rho^4}{8 \cdot \varepsilon J} - \frac{\bar{y} \cdot \rho^3}{3 \cdot \varepsilon J} \quad . . | 0 |$$

Принимая $\pi = 3$ изъ перваго уравненія получимъ $2\bar{y} = \bar{x}$
 Подставляя значеніе \bar{y} во второе уравненіе, получимъ,
 послѣ всѣхъ преобразованій

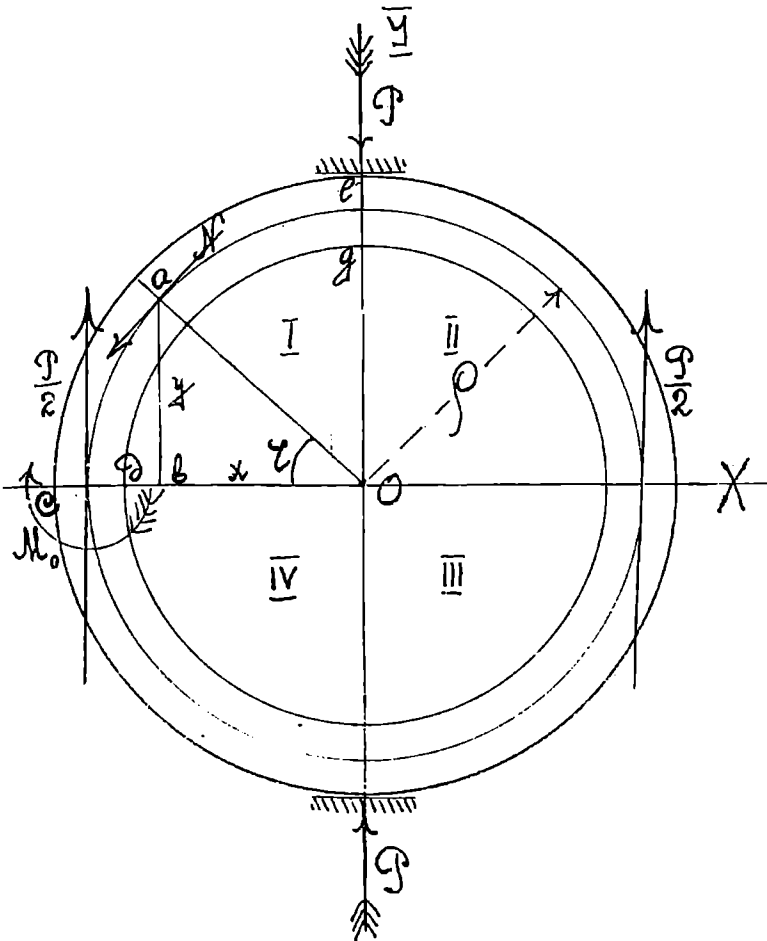
$$\bar{x} = 3q\rho \cdot \frac{J_1}{4J_1 - 3J}, \quad a$$

$$\bar{y} = \frac{3}{2} q\rho \cdot \frac{J_1}{4J_1 - 3J}$$

Зная величины \bar{x} и \bar{y} легко найдти моментъ около
 любой точки A кривого бруса а затѣмъ, по общимъ при-
 емамъ, найдти и максимумъ момента.

Примѣръ 2. РАЗСЧЕТЪ КОЛЬЦА ИЛИ ТРУБЫ НА
 СЖАТІЕ ИЛИ РАСТЯЖЕНІЕ ВЪ ДІАМЕТРАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ. На
 [фиг. 34] представлено кольцеобразное тѣло, сжимаемое

Фиг. 34.



въ направленіи
вертикальнаго діа
метра силою P
Такого рода на -
пряженія могутъ
возникнуть въ ка
нализационной
трубѣ отъ сосре
доченнаго гру
за P , приложен
наго сверху тру
бы и если осно
ваніе, на кото
ромъ лежитъ тру
ба, принять не
сжимаемымъ. Вме
сто сжатія мо
жетъ имѣть мѣсто

и растяженіе | напр. въ звенѣ растягиваемой цѣпи. Дѣло
отъ этого не измѣнится. Всѣ деформациі и напряженія
будутъ совершенно тѣже, что и въ случаѣ сжатія, лишь
направленіе ихъ будетъ противоположно. Поэтому мы и
разбираемъ случай сжатія.

Совершенно достаточно рассмотреть деформациі од
ного только квадранта, хотя бы Γ аго ибо остальные три
находятся въ безусловно одинаковомъ положеніи по зако

ну симметрии.

Рассмотрим поэтому I ^{II} квадрантъ, расположивъ его въ отношеніи координаты осей XOY [фиг. 34] и принявъ сѣченіе $|eg|$ задѣланнымъ. Къ сѣченію $|cd|$ необходимо приложить силы, замѣняющія дѣйствіе нижней части кольца на верхнюю. Изъ условій симметрии заклю- чимъ, что дѣйствіе нижней части кольца на верхнюю по сѣченію $|cd|$ можно привести къ силѣ $\frac{7}{2}P$ и къ момен- ту, неизвѣстной пока величины и неизвѣстнаго направле- нія, M_0 . Величину M_0 найдемъ изъ условій деформациі взятаго нами квадранта кольца. Условіе, которому под- чиняется деформациія нашего кольца, состоитъ въ томъ что бы оба сѣченія квадранта должны оставаться перпендику- лярными другъ къ другу т.е. необходимо, чтобы $\Delta\varphi = 0$ Согласно первому равенству системы уравненія IV имѣемъ поэтому.

$$\Delta\varphi = \Delta(\varphi_2 - \varphi_1) = \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J} + \int \frac{N \cdot d\varphi}{E \cdot a} = 0 \dots |A|$$

Возьмемъ произвольное сѣченіе въ точкѣ a , съ коор- динатами x и y и наклоненное подъ $\angle\varphi$, тогда нетрудно

ВИДѢТЬ, ЧТО

$$N = \frac{Q}{2} \cdot \cos \varphi; \quad ds = \rho d\varphi$$

$$M = \frac{Q}{2} \rho (1 + \cos \varphi) + M_0$$

Подставляя значенія M и N въ уравненіе $|A|$ и принимая во вниманіе, что интегрированіе должно быть распространено по всему квадранту, получимъ :

$$\frac{1}{\varepsilon \gamma} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{Q}{2} \rho (1 - \cos \varphi) + M_0 \right] \rho d\varphi + \frac{1}{\varepsilon \omega} \int_0^{\pi/2} \frac{Q}{2} \cos \varphi d\varphi = 0.$$

НО

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{Q}{2} \rho (1 - \cos \varphi) + M_0 \right] \rho d\varphi &= \frac{Q \rho^2}{2} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\varphi - \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \right\} + \\ + \rho M_0 \int_0^{\pi/2} d\varphi &= \frac{Q \rho^2}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - 1 \right\} + \rho M_0 \cdot \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{Q \rho^2 \pi}{4} - \frac{Q \rho^2}{2} + \frac{M_0 \rho \pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{P}{2} \cdot \cos \varphi \, d\varphi = \frac{P}{2}$$

Слѣдовательно

$$\frac{1}{J} \left(\frac{P \rho^2 \pi}{4} - \frac{P \rho^2}{2} + \frac{M_0 \rho \pi}{2} \right) + \frac{P}{2\omega} = 0$$

Обозначая $\frac{J}{\omega} = r^2$ |плечо или радиусъ инерціи|, получимъ, что

$$\frac{M_0 \rho \pi}{2} = \frac{P \rho^2}{2} - \frac{P \rho^2 \pi}{4} - \frac{P r^2}{2}$$

или

$$M_0 = \frac{P \rho}{\pi} - \frac{P \rho}{2} - \frac{P r^2}{\rho} =$$

$$= \frac{P \rho}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{r^2}{\rho^2} \right) \dots |17|$$

Если возможно пренебречь вліяніемъ продольной силы N , то

$$M_0 = -\frac{P_0}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = -\frac{\pi - 2}{2\pi} P_0$$

или, принявъ $\pi = 3,14$, получимъ

$$M_0 = -0,182 P_0$$
| 18 |

Тремя образомъ въ концѣ горизонтальнаго діаметра мы получимъ моментъ M_0 по знаку отрицательнымъ т.е. моментъ M_0 вызываетъ еще большую кривизну. Этого можно было ожидать напередъ, уже на основаніи предварительнаго разсмотрѣнія явленія. Указанное на [фиг. 34] направленіе момента M_0 должно быть исправлено въ противоположную сторону.

Что же касается момента M_1 действующаго въ кличѣ, то онъ конечно долженъ быть положительнымъ, такъ какъ уменьшаетъ кривизну кольца. Действительно, для опредѣленія M_1 необходимо въ уравненіе для момента подставить найденную величину M_0 и положить $\angle \varphi = \frac{\pi}{2}$ т.е.

$$M_1 = \frac{P}{2} \rho \left(1 + \cos \varphi \right)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} - \frac{P_0 \rho}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{2^2}{\rho^2} \right) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P_0 \rho}{2} - \frac{P_0}{\pi \rho} \left(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{r^2}{\rho^2} \right) = \\ &= \frac{P_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{r^2}{\rho^2} \right] = \\ &= \frac{P_0}{\pi} \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2} \right) \quad \dots \dots |19| \end{aligned}$$

Если возможно пренебречь влиянием продольной силы N то.

$$M_1 = \frac{P_0}{\pi} = 0,318 \cdot P_0 \quad \dots \dots |20|$$

Изъ сопоставленія полученныхъ формулъ видимъ, что благодаря вліянію продольной силы N величина изгибающаго момента возрастаетъ, но возрастаніе это сравнительно невелико, пока поперечные размѣры кольца малы по сравненію съ радіусомъ его ρ .

Если для примѣра, взять отношеніе толщины кольца d къ радіусу ρ равнымъ 5, то

$$\frac{z^2}{\rho^2} = \frac{d^2}{12\rho^2} = \frac{1}{12 \cdot 25} = \frac{1}{300} \quad \text{т.е.}$$

влияние продольной силы на наибольшей изгибающей моментъ составляет $\frac{1}{3}\%$ и имъ можно пренебречь.

Величины наибольшихъ напряженій отъ изгиба въ случаѣ кольца прямоугольнаго поперечнаго сѣченія, высотой h и шириной b , будутъ равны.

1| для сѣченія eq — при $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$N = \frac{P}{2} (\cos \varphi)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = 0 \quad \text{и}$$

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_1}{W} = \pm \frac{6 \cdot 0,318 P \cdot \rho}{h d^2} \dots |21|$$

2| Для сѣченія |с. д.| - при $\varphi = 0$

$$N = \frac{P}{2}$$

$$\sigma_{\max}^1 = \frac{P}{2 \cdot h d} \mp \frac{6 \cdot 0,182 P \rho}{h d^2} \dots |22|$$

Для опредѣленія деформациі горизонтальнаго и вертикальнаго диаметровъ кольца воспользуемся остальными двумя уравненіями $|\bar{V}|$, причѣмъ такъ какъ квадрантъ II, по симметріи, даетъ тѣже измѣненія, что и квадрантъ I, то въ примѣненіи формулъ V къ квадранту Iому, надо будетъ результаты удвоить. Итакъ, увеличеніе длины горизонтальнаго диаметра или приращеніе Δx будетъ равно:

$$\Delta D = 2\Delta x = 2 \int \frac{M ds}{E \cdot y} y - 2 y_1 \int \frac{M ds}{E \cdot y} + 2 \int \frac{N dx}{E \cdot \omega}$$

причемъ :

$$M = \frac{P \rho}{2} (1 - \cos \varphi) + M_0; \quad N = \frac{P \rho}{2} \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi; \quad dx = ds \sin \varphi; \quad ds = \rho d\varphi$$

и

$$y_1 = 0$$

Слѣдовательно

$$\Delta D = 2\Delta x = \frac{2}{E \cdot y} \int \left[\frac{P \rho}{2} (1 - \cos \varphi) + M_0 \right] \rho^2 \sin \varphi d\varphi +$$

$$+ \frac{2}{\varepsilon \cdot \omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{2} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \rho d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{2} (1 - \cos \varphi) + M_0 \right] \rho^2 \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{\rho^3}{2} \left[-\cos \varphi + \frac{\cos 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_0 (\cos \varphi)^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho^3}{4} + \rho^2 M_0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{2} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \rho d\varphi = \frac{\rho^3}{2} \left(-\frac{\cos 2\varphi}{4} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho^3}{4}$$

Подставляя значенія интеграловъ въ уравненіе для $\Delta \mathcal{D}$ получимъ

$$\Delta \mathcal{D} = \frac{2}{\varepsilon \gamma} \left\{ \frac{\rho^3}{4} + \rho^2 M_0 \right\} + \frac{\rho^3}{2 \cdot \varepsilon \omega} \quad |23|$$

Укороченіе вертикальнаго діаметра опредѣлится изъ равенства

$$\Delta \mathcal{D} = -2 \int \frac{M ds}{\varepsilon \cdot \gamma} x + 2x_1 \int \frac{M \cdot ds}{\varepsilon \cdot \gamma} + 2 \int \frac{N dy}{\varepsilon \cdot \omega}$$

ГДЕ $x_1 = \rho$; $x = \rho \cos \varphi$; $dy = ds \cos \varphi$

$$2 \int \frac{M \cdot ds}{EJ} x = -\frac{2}{EJ} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{Q\rho}{2} (1 - \cos \varphi) + M_0 \right] \rho^2 \cos \varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{EJ} \left\{ \frac{Q\rho^3}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi - \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \right] + M_0 \rho^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \right\} =$$

$$= -\frac{2}{EJ} \left\{ \frac{Q\rho^3}{2} \left[\sin \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} - \frac{1}{2} \varphi \right]_0^{\pi/2} + M_0 \rho^2 (\sin \varphi)_0^{\pi/2} \right\} =$$

$$= -\frac{2}{EJ} \left\{ \frac{Q\rho^3}{2} \left[1 - \frac{\pi}{4} \right] + M_0 \rho^2 \right\}$$

$$2x_1 \int \frac{M ds}{EJ} = \frac{2\rho}{EJ} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{Q\rho}{2} (1 - \cos \varphi) + M_0 \right] \rho d\varphi =$$

$$= \frac{2\rho}{\varepsilon\gamma} \left\{ \frac{\mathcal{P}\rho}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy - \frac{\mathcal{P}\rho}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy + M_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \right\} =$$

$$= \frac{2\rho^2}{\varepsilon\gamma} \left\{ \frac{\mathcal{P}\rho\pi}{4} - \frac{\mathcal{P}\rho}{2} + \frac{M_0\pi}{2} \right\}$$

$$2 \int \frac{N dy}{\varepsilon\omega} = \frac{2}{\varepsilon\omega} \int \frac{\mathcal{P}}{2} \cos^2 y \cdot \rho dy =$$

$$= \frac{\mathcal{P}\rho}{\varepsilon\omega} \left(\frac{1}{4} \sin 2y + \frac{1}{2} y \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mathcal{P}\rho\pi}{4\varepsilon\omega}$$

Подставивъ значения найденныхъ интеграловъ получимъ

$$-\Delta\mathcal{Q} = -\frac{2}{\varepsilon\gamma} \left\{ \frac{\mathcal{P}\rho^3}{2} - \frac{\mathcal{P}\rho^3\pi}{8} + M_0\rho^2 \right\} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{\epsilon \gamma} \left\{ \frac{\mathcal{P} \rho^3 \pi}{4} - \frac{\mathcal{P} \rho^3}{2} + \rho^2 \frac{M_0 \pi}{2} \right\} + \frac{\mathcal{P} \rho \pi}{4 \epsilon \omega} = \\
 & = - \frac{2}{\epsilon \gamma} \left\{ \frac{\mathcal{P} \rho^3}{2} + \frac{\mathcal{P} \rho^3}{2} - \frac{\mathcal{P} \rho^3 \pi}{8} - \frac{\pi \rho^3 \mathcal{P}}{4} + M_0 \rho^2 - \frac{M_0 \rho^2 \pi}{2} \right\} + \frac{\mathcal{P} \rho \pi}{4 \epsilon \omega} = \\
 & = \frac{2}{\epsilon \gamma} \left\{ -\mathcal{P} \rho^3 + M_0 \rho^2 \cdot \frac{\pi - 2}{2} + \frac{3}{8} \mathcal{P} \rho^3 \pi \right\} + \frac{\mathcal{P} \rho \pi}{4 \epsilon \omega} \dots |24|
 \end{aligned}$$

Если пренебречь влиянием продольной силы то формулы |23| и |24| примутъ видъ при

$$M_0 = - \frac{\pi - 2}{2\pi} \cdot \mathcal{P} \rho$$

$$\Delta \mathcal{P} = \frac{2}{\epsilon \gamma} \left\{ \frac{\mathcal{P} \rho^3}{4} + \rho^2 M_0 \right\} =$$

$$= \frac{\mathcal{P} \rho^3}{\epsilon \gamma} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\pi - 2}{\pi} \right\} = \frac{\mathcal{P} \rho^3}{\epsilon \gamma} \cdot \frac{4 - \pi}{2\pi}$$

$$-\Delta \mathcal{D} = \frac{2}{\epsilon \mathcal{J}} \left\{ -\mathcal{P} \rho^3 + \frac{3}{8} \mathcal{P} \rho^3 \pi + M_0 \rho^2 \frac{\pi - 2}{2} \right\} =$$

$$= \frac{\mathcal{P} \rho^3}{\epsilon \mathcal{J}} \left\{ \frac{1}{4\pi} - \frac{2}{\pi} \right\} \dots \dots \text{'24a'}$$

Если въ формулѣ 24, при

$$M_0 = - \frac{\pi - 2}{2\pi} ,$$

сохранить членъ указывающій вліяніе нормальной силы, то формула |24| приметъ видъ

$$-\Delta \mathcal{D} = \frac{\mathcal{P} \rho^3}{\epsilon \mathcal{J}} \left\{ \frac{1}{4\pi} - \frac{2}{\pi} \right\} +$$

$$+ \frac{\mathcal{P} \rho \pi}{4 \epsilon \omega} \dots \dots \text{'24б'}$$

Означенную формулу и даетъ *J. Résal* въ своемъ томѣ о металлическихъ конструкціяхъ для расчета кругового

кольца, подверженнаго дѣйствию двухъ равныхъ и противоположныхъ силъ въ направленіи діаметра x .

H. Léauté (*sur l'équilibre et la déformation des pièces circulaires*) далъ болѣе подробную формулу, которая по исправленіи одной второстепенной ошибки, имѣетъ видъ

$$-\Delta D = \frac{P\rho^3}{EJ} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right\} + \frac{P\rho\pi}{4E\omega} + 2(1+\eta) \frac{P\rho\pi}{4E\omega} \dots |24в|$$

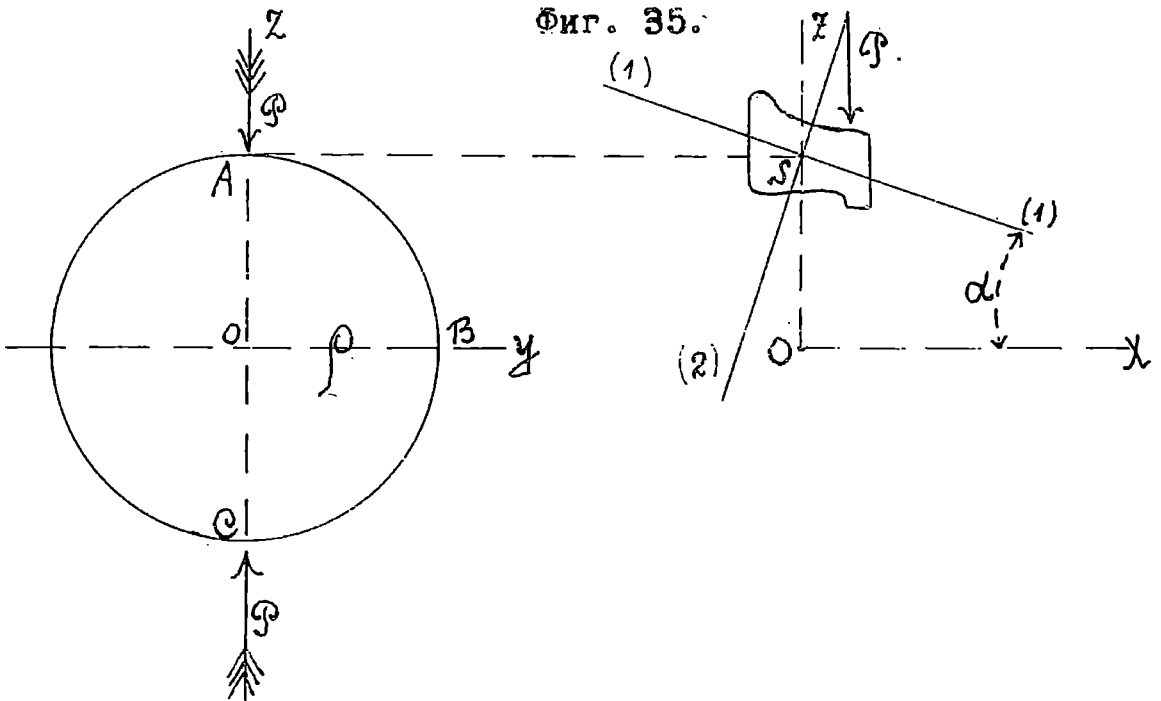
гдѣ η - постоянная Пуассона.

Последній - третій членъ изображаетъ собой вліяніе сдвигающихъ или перерѣзывающихъ усилій на деформацию вертикальнаго діаметра кольца.

Mesnager, *Ingénieur des Ponts et Chaussées*; въ своей замѣткѣ о приближенности формулъ изгиба арки (*Ann. d. Ponts et Chaussées* 1903 г. I partie. p. 164 - 202) даетъ болѣе общую формулу для деформации вертикальнаго діаметра бандажнаго кольца, а именно: если обозначить через J_1 и J_2 - главные моменты инерціи площади сѣченія бандажа, а через α

x | Мы измѣнили только обозначенія *Résal'* я съ цѣлью согласованія ихъ съ данными, полученными выше.

уголъ наклона главных осей къ осямъ Z и X |фиг.35|



Фиг. 35:

то формула приметъ видъ

$$f = -\Delta \mathcal{D} = \frac{P \rho^3}{\epsilon} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\mathfrak{J}_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{\mathfrak{J}_2} \right) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) +$$

$$+ \frac{P \rho \pi}{4 \epsilon \omega} + 2(1 + \eta) \frac{P \rho \pi}{4 \epsilon \omega} \dots |24г.|$$

Въ случаѣ нашемъ, когда $\angle \alpha = 0$

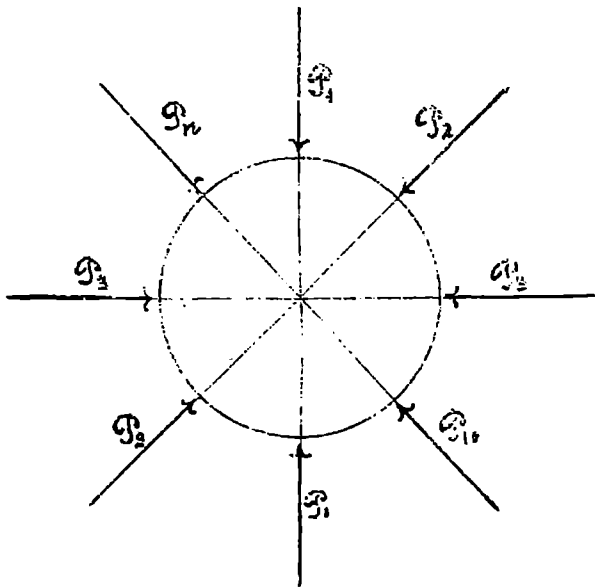
$$-\Delta \mathcal{D} = \frac{P \rho^3}{\epsilon \mathfrak{J}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{P \rho \pi}{4 \epsilon \omega} + 2(1 + \eta) \frac{P \rho \pi}{4 \epsilon \omega} \dots |24в|$$

т.е. получили формулу 246

П р и м е р 3. Определить напряженіе и деформациі въ кругломъ кольцѣ постоянного сѣченія при дѣйствіи N равныхъ и симметрично расположенныхъ сжимающихъ силъ [фиг. 36].

Фиг. 36.

Фиг. 36.

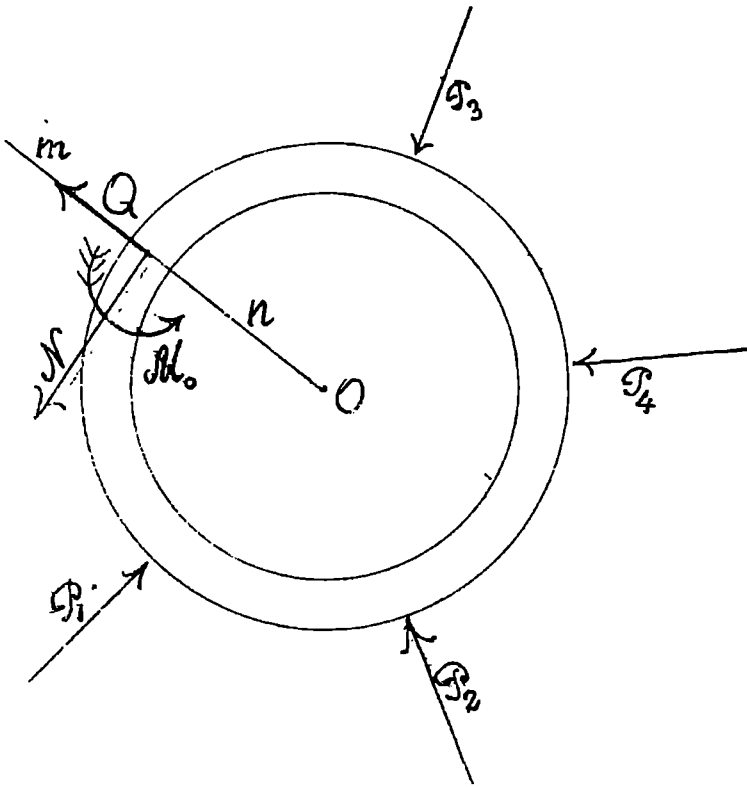


Пользуясь рѣшеніемъ примѣра № 2 для кольца, сжатого двумя равными и прямопротивоположными силами, можно въ любомъ сѣченіи найти напряженія отъ каждой пары $(P_n - P_n)$ взаимно противоположныхъ силъ. Для полученія результата дѣйствія всѣхъ

N силъ, придется воспользоваться „принципомъ сложенія дѣйствія силъ“.

Если теперь имѣется кольцо, подвергающееся дѣйствію любой системы силъ, находящихся въ равновѣсіи [фиг. 37], то для опредѣленія напряженій въ кольцѣ разсѣкаемъ его сѣченіемъ $m-n$ и дѣйствіе одной части на другую въ самомъ общемъ случаѣ можетъ быть приведено къ продольной и поперечной силамъ N и Q и къ изгибающему моменту M_0 . Для опредѣленія въ данномъ случаѣ 3 лишнихъ неизвѣстныхъ проще всего воспользоваться принципомъ производной работы деформациі.

Фиг. 37.

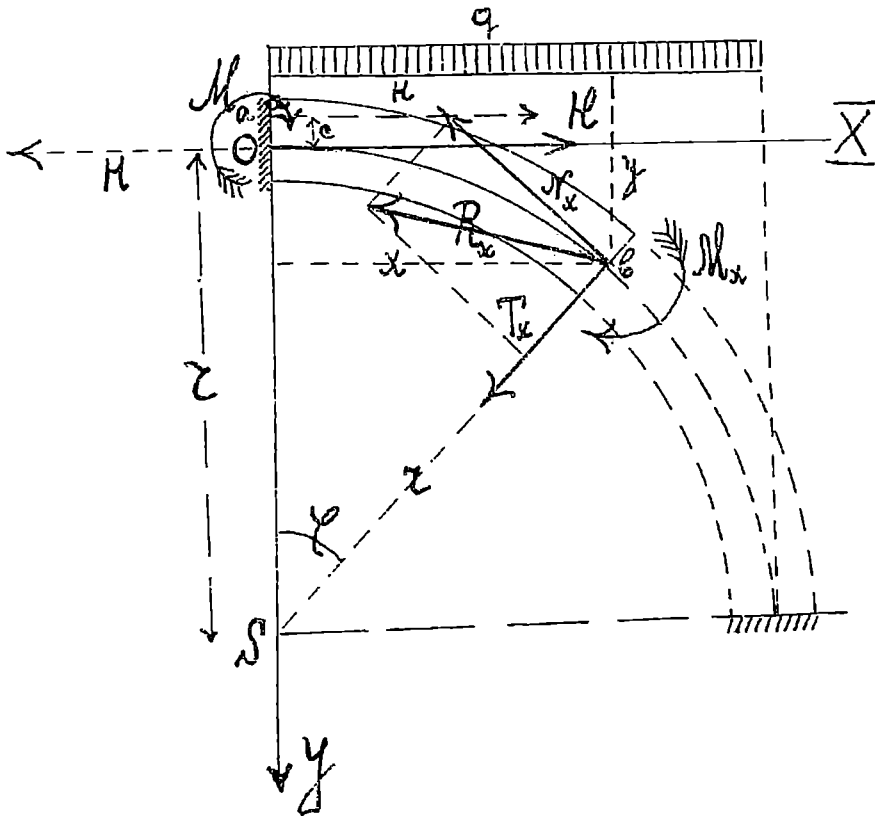


Для этого придется вы-
 браться выраже-
 ние для потен-
 циальной энер-
 гии изогнутого
 стержня, |смот-
 ри формулы 14,
 15, 16 пун. 8|
 и представить
 въ функции лиш-
 нихъ неизвѣст -
 ныхъ N, Q и
 M_0 . Затѣмъ
 производныя отъ

потенциальной энергии по этимъ неизвѣстнымъ приравнять нулю.

П р и м ѣ р ъ 4. Опредѣленіе напряженій въ цилин-
 дрической чугунной круглой трубѣ, подверженной сплющи-
 ванію и находящейся подъ давленіемъ равномерно-распре-
 деленной нагрузки q по горизонтальной проециціи ея |фи-
 38|. Чугунныя трубы могутъ быть уложены въ зависи-
 мости отъ условій, или вдѣланными до половины вы-
 соты въ каженную кладку |подъ желѣзно - дорожны -
 ми насыпками| или же непосредственно на грунтѣ.
 Въ отношеніи нъ вертикальному давленію, трубы пер-

Фиг. 38.



вой категоріи будуть знаходитися въ условіяхъ полусир-
кульной арки съ задѣянными пятами т.е. труба можетъ
сплющиваться при сохраненіи какъ первоначальной длины
горизонтального діаметра, такъ и первоначального зна-
ченія тангенса угла наклоненія кривой въ пятовыхъ сѣ-
ченіяхъ; въ трубахъ второй категоріи произойдетъ сплю-
щиваніе съ удлиненіемъ горизонтального діаметра.

Разсмотримъ предварительно первый случай. Помѣстимъ на-
чало координатъ $|o|$ въ вершинѣ арки, принимая оси, на-
правленныя вправо и внизъ, положительными. Вслѣдствіе
симметріи относительно вертикальной оси y овѣ каждая
изъ половинъ арки должна находиться въ равновѣсіи и

кроме того равнодействующая всех внутренних усилий $|H|$ в верхнем сечении арки [ея распоръ] должна быть горизонтальна. Точка ея приложения $|a|$ в сечении вершины арки неизвестна. Мы можем всегда перенести H изъ точки ея приложения $|a|$ въ центръ тяжести $|o|$ сечения и получить H , приложеннымъ въ этой точкѣ, и добавочный отъ переноса моментъ $|M_0|$ пары силъ, равный: $M_0 = H \cdot c$, гдѣ c вертикальное разстояніе точки $|a|$ отъ центра тяжести сечения $|o|$. Выдѣлимъ теперь мысленно отръзокъ арки Ob и предположимъ, что въ сеченияхъ O и b приложены искомыя усилія. Усилія эти, будучи по существу своему внутренними, могутъ быть разсматриваемы какъ внѣшнія силы по отношенію отръзка Ob . Для вершины арки означенныя усилія какъ только что было указано, сведутся къ горизонтальной силѣ, или распору арки, H и моменту M_0 . Для сечения $|b|$ эти усилія сведутся къ:

N_x - нормальной силѣ, приложенной въ центрѣ тяжести сечения или, что тоже, къ касательной къ осевой линіи арки силѣ, проходящей черезъ ту же точку.

T_x - поперечной или перерѣзывающей силѣ, лежащей въ плоскости сечения и совпадающей съ одной изъ главныхъ осей инерціи площади сечения.

M_x - изгибающему моменту, равному моменту всехъ внѣшнихъ силъ дѣйствующихъ на отръзокъ ар-

ки Ob включая сюда N и M_0 или, что то же, моменту, равному отъ переноса равнодѣйствующей R_x , изъ силъ N_x и T_x , изъ неизвѣстной пока точки ея приложенія въ сѣченіи $|v|$ - въ центръ тяжести сѣченія: $|v|$.

Для условій равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на плоскости и приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, имѣются три основныхъ уравненія статики. Для составленія означенныхъ уравненій возьмемъ сумми проекціи всѣхъ силъ на касательную и нормальную къ осевой линіи въ сѣченіи $|v|$, въ центрѣ его тяжести (координаты x и y) и возьмемъ сумми моментовъ всѣхъ силъ относительно оси, перпендикулярной къ плоскости дѣйствія силъ и проходящей черезъ центръ тяжести сѣченія v .
Получимъ систему трехъ уравненій.

$$\left. \begin{aligned} N_x + N \cos \varphi + q_x \cdot \sin \varphi &= 0 \\ T_x + N \sin \varphi + q_x \cdot \cos \varphi &= 0 \\ M_x + M_0 + N y - \frac{1}{2} q x^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{А.}$$

|при проектированіи знаки отнесены къ косинусамъ и синусамъ угловъ|

Причемъ:

$$x = z \cdot \sin \varphi; \quad y = z (1 - \cos \varphi) \quad |B|$$

Неизвестныхъ въ данномъ случаѣ пять, а именно: N , M_x , T_x , M_0 и M_x , уравненій же три, следовательно задача статически неопредѣлима. Для раскрытiя статической неопредѣлимости воспользуемся уравненiями теорiи изгиба кривыхъ брусевъ.

Сначала пренебрежемъ влiянiемъ нормальной силой и допустимъ, что кривизна арки или трубы незначительна, тогда, согласно выводамъ п. 13, имѣемъ еще систему трехъ уравненiй V.

Если взять теперь первое изъ системы | V | уравненiй, характеризующее величину приращенiя $|\Delta \varphi|$ угла смежности и принять во вниманiе условiя заданiя, что при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. въ пятовомъ сѣченіи, сѣченіе арки не перемѣщается или, что то же, $\Delta \varphi = 0$, то получимъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_x ds}{E \cdot J} = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x ds = 0 \quad |B|$$

Подставляя въ уравненіе В, значеніе M_x изъ уравненія |А| и $ds = r d\varphi$ имѣемъ

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -M_0 - H y + \frac{1}{2} q x^2 \right\} r d\varphi \quad \text{или}$$

$$0 = -r \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_0 d\varphi - H r \int_0^{\frac{\pi}{2}} y d\varphi + \frac{1}{2} q r \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d\varphi \quad \text{но}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y d\varphi = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \varphi) d\varphi = r (\varphi - \sin \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) r$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d\varphi = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = r^2 \left(-\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= r^2 \frac{\pi}{4},$$

слѣдовательно

$$0 = -\frac{r\pi}{2} M_0 - H r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{1}{8} q r^3 \pi \quad \text{или}$$

$$-\frac{\pi}{2} M_0 - r \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) H + \frac{1}{8} \pi q r^2 = 0 \quad \dots | \text{Г} |$$

Второе уравнение системы V, характеризующее приращение координаты x , дает, согласно условию задания.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_x ds}{E J} y - y_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_x ds}{E J} = 0$$

Такъ какъ начало оси арки совпадаетъ съ началомъ координатъ, то $y_1 = 0$ и слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_x ds}{E J} y = 0 \quad \text{или по сокращеніи} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x y ds = 0$$

Но $y = r(1 - \cos \varphi)$ слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x y ds = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x ds - r \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x \cos \varphi ds = 0$$

или, такъ какъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x ds = 0$ |см. ур. В|

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x \cos \varphi ds = 0 \quad \dots \text{Д}$$

Подставляя значение M_x и ds въ уравненіе |Д|, получимъ

$$-r \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_0 \cos \varphi d\varphi - H r \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{2} q r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos \varphi d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_0 \cos \varphi d\varphi = M_0 (\sin \varphi)_0^{\frac{\pi}{2}} = M_0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cos \varphi d\varphi = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi - r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi =$$

$$= r \left\{ \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \varphi \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} = r \left\{ 1 - \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos \varphi d\varphi = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = r^2 \left(\frac{\sin^3 \varphi}{3} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{3}$$

Окончательно имѣемъ

$$-r M_0 - H r^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{q r^3}{6} = 0$$

или

$$-M_0 - H r \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{q r^2}{6} = 0 \quad \dots |E|$$

Рѣшая совмѣстныя уравненія | F | и | E. | получимъ

$$\left. \begin{aligned} -M_0 \frac{\pi}{2} - z \cdot H \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{1}{8} \pi q z^2 &= 0 \\ -M_0 \frac{\pi}{2} - Hz \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{\pi}{2} + \frac{q z^2 \pi}{12} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

+ - +

$$\frac{Hz\pi}{2} - \frac{zH\pi}{2} - \frac{Hz\pi^2}{8} + zH + \frac{qz^2\pi}{24} = 0$$

или

$$-Hz \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) + \frac{qz^2\pi}{24} = 0$$

или

$$H = qz \cdot \frac{\pi}{3(\pi^2 - 8)} = 0,563 qz \quad \dots |25|$$

Подставляя найденное значеніе для H въ уравненіе E получимъ

$$M_0 = \frac{qz^2}{6} - z \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{qz\pi}{3(\pi^2 - 8)} =$$

$$= \frac{qz^2}{6} - \frac{qz^2\pi}{3(\pi^2 - 8)} + \frac{qz^2\pi^2}{12(\pi^2 - 8)} = \text{или}$$

$$= M_0 = \frac{qr^2}{12} \left[2 - \frac{\pi^2 - 4\pi}{\pi^2 - 8} \right] =$$

$$= 0,0457qr^2 \quad \dots |26|$$

Зная H и M_0 легко найти при помощи уравнений |А| значения N_x , M_x и T_x для любого сѣченія арки. Такъ для сѣченія въ вершинѣ арки, гдѣ $\angle \varphi = 0$ получимъ слѣдующія уравненія:

$$\left. \begin{aligned} N_a &= -H \cos 0 - qr \sin^2 0 = -H = -0,563qr \\ M_a &= -M_0 - Hr(1 - \cos 0) + \frac{qr^2 \sin^2 0}{2} = -M_0 = -0,0457qr^2 \\ T_a &= -H \sin 0 - qr \sin 0 \cdot \cos 0 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Для пятового сѣченія - при $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$N_e = -H \cos \frac{\pi}{2} - qz \sin^2 \frac{\pi}{2} = -qz$$

$$M_e = -M_0 - Hz \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} qz^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} =$$

$$= -0,0457 qz^2 - 0,563 qz^2 + 0,5090 qz^2 = -0,1087 qz^2$$

$$T_e = -H \sin \frac{\pi}{2} - qz \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = -H = -0,563 qz$$

Максимумъ N найдется изъ условія

$$\frac{dN_x}{d\varphi} = H \sin \varphi - 2qz \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{H}{2qz} = \frac{0,563 qz}{2qz} = 0,2815; \varphi = 73^\circ 40'$$

Вторая производная при

$$\cos \varphi = \frac{H}{2qz}$$

будетъ больше нуля; но такъ какъ N_x въ предѣлахъ отъ

$$\varphi = 0 \quad \text{до} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

сама по себе величина отрицательная, то

$$\frac{d^2 N}{d\varphi^2} > 0$$

соответствует максимуму значения N_x , следовательно

$$\begin{aligned} N_{\max} &= -\frac{H^2}{2qz} - qz \left(1 - \frac{H^2}{4q^2z^2}\right) = \\ &= -0,158qz - qz + 0,079qz = -1,079qz. \end{aligned}$$

Соответствующее значение M_x равно:

$$\begin{aligned} M_x &= -M_0 - Hz(1 - \cos\varphi) + \frac{qz^2}{2}(1 - \cos^2\varphi) = \\ &= -0,0457qz^2 - Hz\left(1 - \frac{H}{2qz}\right) + \frac{qz^2}{2}\left(1 - \frac{H^2}{4q^2z^2}\right) = \\ &= -0,0457qz^2 - 0,4043qz^2 + 0,4604qz^2 \underline{00} + 0,0104qz^2 \end{aligned}$$

|29|

Максимум для M_x найдется из условия

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{d\varphi} &= \frac{1}{d\varphi} \left\{ -M_0 - Hz(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2}qz^2 \sin^2\varphi \right\} = \\ &= -Hz \sin\varphi + qz^2 \sin\varphi \cos\varphi = 0 \end{aligned}$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{H}{qz} = 0,563; \quad \varphi = 55^{\circ}40'$$

Нетрудно убедиться, что при $\cos \varphi = \frac{H}{qz}$

$$\frac{d^2 M_x}{d\varphi^2} < 0$$

$$M_{\max} = -M_0 - Hz(1 - \cos \varphi) + \frac{qz^2}{2}(1 - \cos^2 \varphi) =$$

$$= -M_0 - Hz\left(1 - \frac{H}{qz}\right) + \frac{qz^2}{2}\left(1 - \frac{H^2}{q^2z^2}\right) =$$

$$= -0,0457qz^2 - 0,246qz^2 + 0,342qz^2 = +0,0503qz^2$$

| 30 |

Составляющее значение N_x

$$N_x = -\frac{H^2}{qz} - qz\left(1 - \frac{H^2}{q^2z^2}\right) =$$

$$= -0,317qz - 0,683qz = -qz$$

Моментъ обращается въ нуль при $\angle \varphi$, определенномъ

изъ уравненія

$$-M_0 - H r (1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} q r^2 \sin^2 \varphi = 0$$

или

$$-0,0457 q r^2 - 0,563 q r^2 (1 - \cos \varphi) + 0,50 q r^2 \sin^2 \varphi = 0$$

$$-0,6087 + 0,563 \cos \varphi + 0,50 - 0,50 \cos^2 \varphi = 0$$

$$\cos^2 \varphi - 1,126 \cos \varphi + 0,217 = 0 \quad \text{откуда}$$

$$\cos \varphi = +0,563 \pm \sqrt{0,316 - 0,217} = 0,563 \pm 0,315$$

Слѣдовательно

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = 0,878 \quad \text{или} \quad \angle \varphi = 28^\circ 40' \\ \cos \varphi = 0,248 \quad \text{или} \quad \angle \varphi = 75^\circ 40' \end{array} \right.$$

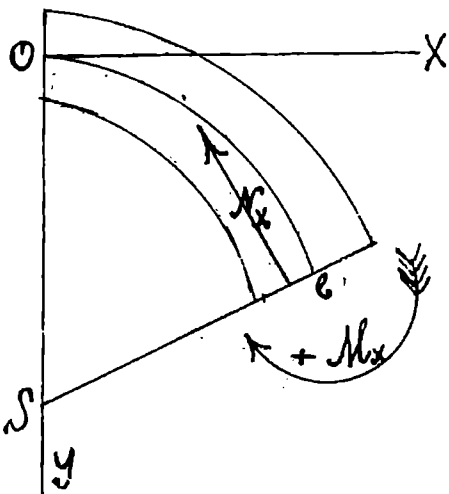
Такимъ образомъ видимъ, что моментъ M_x при $\varphi = 0$ величина отрицательная, равная $-0,0457 q r^2$

Съ увеличеніемъ φ - M_x уменьшается и при $\varphi = 28^\circ 40'$, $M_x = 0$. Отъ $\varphi = 28^\circ 40'$ до $\varphi = 75^\circ 40'$, M_x - величина положительная, достигая наибольшаго значенія $|+0,0503qr^2|$ при $\varphi = 55^\circ 40'$. Наконецъ между $\varphi = 75^\circ 40'$ и $\varphi = 90^\circ$ - M_x величина снова отрицательная, измѣняя свои значенія отъ 0 до $|-0,1087qr^2|$.

Что же касается M_x , то въ предѣлахъ отъ $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$, величина M_x отрицательная, увеличиваясь отъ $M_x = -0,563qr$ до $M_x = -1,079$, при $\varphi = 73^\circ 40'$, и снова уменьшаясь до $M_x = -1,0qr$, при $\varphi = 90^\circ$.

Если теперь M_x величина отрицательная въ предѣлахъ отъ $\varphi = 0$ до $\varphi = 90^\circ$, то слѣдовательно $N \cdot \cos \varphi$ и $N \cdot \sin \varphi$ - также отрицательныя величины, а потому, согласно условному обозначенію, составляющія этого усилія направлены снизу - вверхъ и справа налѣво, т.е. по отношенію отръзка Ob [фиг. 38]. M_x въ сѣченіи $(x-y)$ всегда продольное сжимающее усиліе. Положительными моментами мы обозначали тѣ, моментъ вращенія которыхъ

Фиг. 39.



соотвѣтствуетъ направленію движенія часовой стрѣлки. Если M_x моментъ внутреннихъ усилій въ сѣченіи $|xy|$ - величина положительная [фи. 39], то это значитъ, что M_x - приложена ниже осевой линіи т.е. фибры верхней половины сѣченія подвергаются вытягивающе-

му напряженію, а фибры нижней половины сжимающему напряженію. Если M_x - величина отрицательная, тогда имѣетъ мѣсто обратное явленіе.

Слѣдовательно въ аркѣ съ задѣланными пятнами фибры верхней половины сѣченія будутъ подвержены сжимающему напряженію, а нижней половины - вытягивающему въ предѣлахъ отъ $\varphi = 0$ до $\varphi = 28^\circ 40'$ и отъ $\varphi = 75^\circ 40'$ до $\varphi = 90^\circ$. Въ сѣченіяхъ арки отъ $\varphi = 28^\circ 40'$ до $\varphi = 75^\circ 40'$ - верхнія фибры вытянуты, а нижніе сжаты. Въ этомъ случаѣ арка приметъ видъ, изображенный на |фиг. 40|

Прилагая указатели: a, b, c и d къ сѣченіямъ въ вершинѣ арки, въ пятѣ, въ сѣченіи съ наибольшимъ положительнымъ моментомъ и наибольшимъ сжимающимъ усиленіемъ,

$$\text{имѣемъ } M_a = -0,563qr; \quad M_b = -0,0457qr^2, \quad \text{при } \varphi = 0$$

$$M_c = -1,000qr; \quad M_d = -0,1027qr^2, \quad \text{при } \varphi = 90^\circ$$

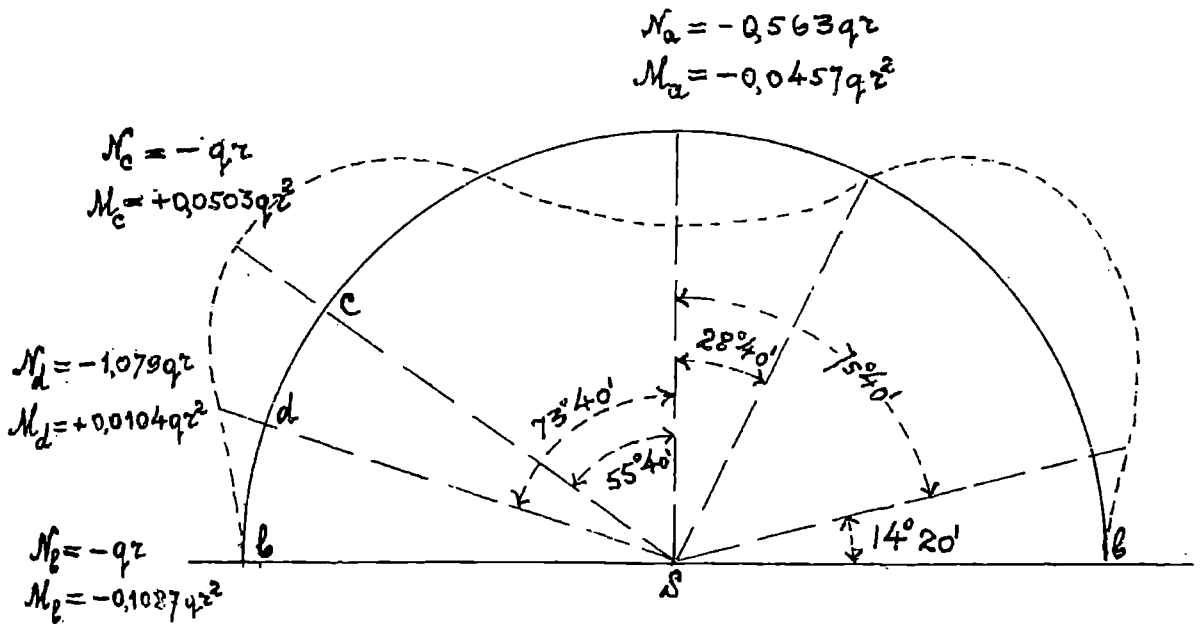
$$M_e = -1,000qr; \quad M_f = +0,0503qr^2, \quad \text{при } \varphi = 55^\circ 40'$$

$$M_g = -1,079qr; \quad M_h = +0,0104qr^2, \quad \text{при } \varphi = 73^\circ 40'.$$

Для измѣненія ординаты y т.е. для опредѣленія приращенія Δy воспользуемся третьимъ изъ системъ уравненій | V |, а именно

$$\Delta(y_2 - y_1) = - \int \frac{M_x \cdot ds}{E \cdot J} x + x_1 \int \frac{M \cdot ds}{E \cdot J}$$

Фиг. 40.



Согласно условиям задания и принятой системы координатных осей [фиг. 38], имеем, что при $\varphi = 0 - x_1 = 0$, и при $\varphi = \frac{\pi}{2} - \Delta y_2 = 0$, следовательно последнее уравнение для рассматриваемого случая примет вид

$$\Delta y_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_x ds}{EJ} x = \frac{z^2}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_x \sin \varphi d\varphi$$

Подставляя значение M_x из равенства А, получим

$$\Delta y_1 = \frac{z^2}{EJ} \left\{ -M_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi - Hz \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi + \right.$$

$$+ \frac{qz^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 y \, dy$$

ГДЕ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy = \left(-\cos y \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos y) \sin y \, dy = \left\{ -\cos y - \frac{1}{2} \sin^2 y \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 y \, dy &= -\frac{\sin^2 y \cos y}{3} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy = \\ &= \left[-\frac{\sin^2 y \cdot \cos y}{3} - \frac{2}{3} \cos y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

СЛЕДОВАТЕЛЬНО

$$\Delta y_1 = \frac{z^2}{EJ} \left\{ -M_0 - \frac{1}{2} H z + \frac{qz^2}{3} \right\} =$$

$$= \frac{z^2}{EJ} \left\{ -0,0457 qz^2 - 0,2815 qz^2 + 0,333 qz^2 \right\} =$$

$$= \frac{qz^4}{EJ} \left\{ -0,328 + 0,333 \right\} = 0,005 \frac{qz^4}{EJ}$$

Такъ какъ Δy положительно, то, согласно принятому положенію координатныхъ осей, Δy будетъ выражать собой величину пониженія вершины арки.

Если бы теперь захотѣли бы выяснитъ вліяніе нормальной силы \mathcal{N} на точность полученныхъ результатовъ и рассматривали бы трубу, какъ арку большой кривизны, то пришлось бы пользоваться уже системой уравненій VI пун. 14.

Въ этомъ направленіи эта задача подробно разобрана профессоромъ Л. Николаи въ его трудѣ „Объ опредѣленіи напряженій въ цилиндрической круглой трубѣ, подверженной сплющиванію“ [Сборн. Инст. Инж. Пут. Сообщ. выпускъ V - 1886 г.]. Результаты, полученные имъ, нижеслѣдующіе: рѣшеніе первыхъ двухъ уравненій системы VI даетъ

$$0 = - \left(1 + \frac{\mathfrak{J}}{z^2 \omega} \right) 1,57 \mathcal{M}_0 - \mathcal{H} z \left[\left(1 + \frac{\mathfrak{J}}{z^2 \omega} \right) 0,57 + \frac{\mathfrak{J}}{z^2 \omega} \right] +$$

$$+ \left(1 - \frac{\mathfrak{J}}{z^2 \omega} \right) 0,3925 q z^2 \quad \text{и}$$

$$0 = \mathcal{M}_0 z^2 + \mathcal{H} z^3 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{q z^4}{16}$$

Если пренебречь въ окончательномъ выводѣ, какъ

это и дѣлаетъ Л. Николаи, величиной $\frac{\gamma}{r^2 \omega}$ въ сравненіи съ I, то мы получимъ систему, ранѣе уже выведенныхъ нами, уравненій.

Для Δy получимъ

$$\Delta y = 0,00546 \cdot \frac{q r^4}{E \gamma} + 1,348 \frac{q r^2}{E \omega} \quad . |32|$$

Такимъ образомъ вліяніе \mathcal{N} , совместно съ вліяніемъ кривизны, главнымъ образомъ отражается на величинѣ деформаций $|\Delta y|$ и имѣетъ ничтожное вліяніе на величины самой нормальной силы и изгибающаго момента.

Перейдемъ теперь ко второму случаю, предполагая, что труба можетъ сплющиваться съ удлиненіемъ ея горизонтальнаго діаметра.

Въ этомъ случаѣ распоръ $H = 0$ въ виду того, что горизонтальный діаметръ трубы, вмѣстѣ съ увеличеніемъ нагрузки, можетъ постоянно удлиняться, причемъ однако, касательная къ аркѣ въ пятовомъ сѣченіи всегда остается вертикальной. Къ тому же выводу можно придти и другимъ путемъ, пользуясь общими выраженіями, выведенными выше для Δy и Δx , применяя ихъ къ кольцевому сѣченію, разрѣзанному вертикальной плоскостью на двѣ симметричныя части. Въ этомъ случаѣ φ можетъ измѣняться отъ $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$, причемъ при указанныхъ предѣлахъ

какъ $\Delta\varphi$, такъ и $\Delta\chi$ порознь равны нулю.

Общее выраженіе для $\Delta\varphi$, полученное ранѣе, имѣетъ видъ.

$$\left[-z \cdot M_0(\varphi) - H z^2 (\varphi - \sin \varphi) + \frac{q z^3}{2} \left(-\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right) \right] = \Delta\varphi$$

Подставляя предѣлы $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, получимъ

$$-M_0\pi - H z^2 \pi + \frac{q z^2 \pi}{4} = 0$$

Общее выраженіе для $\Delta\chi$ имѣетъ видъ

$$\left[-z M_0(\varphi) - H z^2 (\varphi - \sin \varphi) + \frac{q z^3}{2} \left(-\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right) \right. \\ \left. + z M_0(\sin \varphi) + H z^2 \left\{ \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \varphi \right\} - \frac{q z^3}{2} \left(\frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \right] = \Delta\chi$$

Подставляя предѣлы $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ получимъ

$$-M_0\pi - 1,5 H z^2 \pi + \frac{q z^2 \pi}{4} = 0$$

Рѣшая полученныя два уравненія, получимъ что $H=0$
Слѣдовательно

$$M_0 = \frac{qz^2}{4} = 0,25qz^2 \dots\dots\dots |33|$$

Пользуясь уравненіями |A| для даннаго случая, получимъ

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -qz \sin^2 \varphi \\ T_x &= -qz \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ M_x &= -M_0 + \frac{qz^2 \sin^2 \varphi}{2} \end{aligned} \right\} |A_1|$$

Изслѣдуя ихъ, мы можемъ написать аналогично съ первымъ случаемъ:

$$N_a = 0; \quad M_a = -0,25qz^2 \quad \text{при} \quad \varphi = 0^\circ$$

$$N_b = -qz; \quad M_b = +0,25qz^2 \quad \text{при} \quad \varphi = 90^\circ$$

$$N_c = -0,5qz; \quad M_c = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 45^\circ$$

Слѣдовательно съ измѣненіемъ φ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ сжи -
мающее усиліе постоянно увеличивается отъ $N_x = 0$ до

$M_x = -qz$. Моментъ при $\varphi = 0$ - отрицательная величина; при переходѣ отъ $\varphi = 0$ до $\varphi = 45^\circ$ численная величина момента убываетъ съ $-0,25qz^2$ до нуля, затѣмъ дѣлается положительной величиной, достигая при $\varphi = 90^\circ$ того же численного значенія, какъ и при $\varphi = 0$, но только противоположнаго знака.

Величина удлиненія горизонтальнаго діаметра опредѣлится изъ выраженія для Δx , полагая $M_0 = 0,25qz^2$
 $H = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$-\Delta x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_x ds}{EJ} y - y_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_x ds}{EJ}$$

| см. ур. V | или

такъ какъ при $\varphi = 0$, $y_1 = 0$, то

$$-\Delta x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_x ds}{EJ} y = \frac{1}{EJ} \left[-M_0 z^2 - Hz^3 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{qz^4}{16} \right]$$

или подставляя значенія M_0 и H получимъ

$$\frac{1}{EJ} \left[-0,25qz^4 + \frac{qz^4}{16} \right] = \frac{qz^4}{12 \cdot EJ}$$

или

$$\Delta x = \frac{q z^4}{12 \cdot \epsilon \gamma} \dots |34|$$

Величина понижения вершины арки найдется из третьего из системы уравнения V , при найденных значениях для M_0 и H .

Выше было найдено, что

$$\Delta y_1 = \frac{z^2}{\epsilon \gamma} \left\{ -M_0 - \frac{1}{2} H z + \frac{q z^2}{3} \right\}$$

Подставляя значения M_0 и H имеем

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \frac{z^2}{\epsilon \gamma} \left\{ -0,25 q z^2 + 0,333 q z^2 \right\} = \\ &= 0,083 \frac{q z^4}{\epsilon \gamma} \dots |35| \end{aligned}$$

При учитывании влияния нормальной силы и кривизны трубы:

$$\Delta y_1 = 0,083 \frac{q z^4}{\epsilon \gamma} + \frac{0,285 q z^2}{\epsilon \cdot \omega} \dots |36|$$

Перерѣзывающее усилие

$$T_x = 0 \quad \text{при } \varphi = 0$$

$$T_x = 0 \quad \text{при } \varphi = 90^\circ$$

$$T_x = -0,592 \quad \text{при } \varphi = 45^\circ$$

17 | ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХЪ ФОРМУЛЬ ДЕФОРМАЦИИ КРИВОГО БРУСА БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ КЪ РѢШЕНІЮ ПРИМѢРОВЪ.

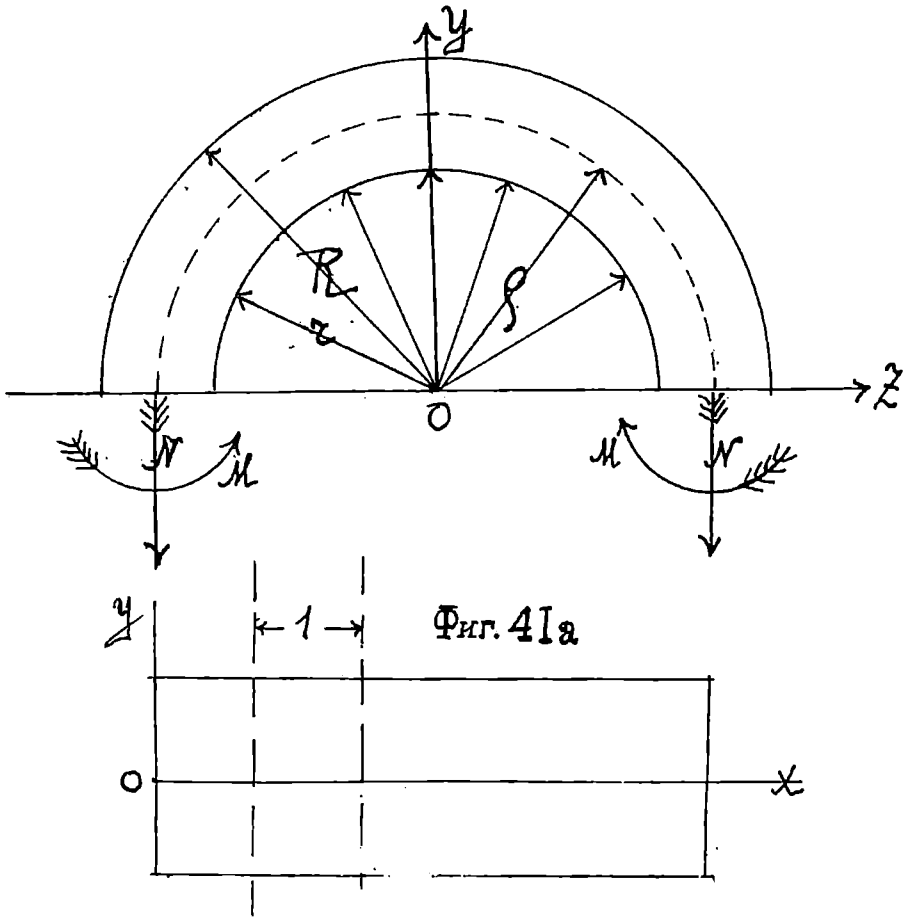
П р и м ѣ р њ I. Опредѣлить напряженія въ поломъ круговомъ цилиндрѣ, подверженномъ внутреннему равномерному давленію p , нормальному къ его поверхности.

Обозначимъ радіусы внутренней и наружной цилиндрической поверхности черезъ r и R , а радіусъ оси цилиндра черезъ ρ т.е.

$$\rho = \frac{r+R}{2}$$

Выдѣлимъ для расчета, двумя параллельными и нормальными къ продольной оси цилиндра плоскостями - цилиндръ, длиной, равной единицѣ [фиг. 4Ia] и раздѣлимъ послѣдній произвольно проведенной меридіанальной плоскостью на двѣ равныя части. Напряженія въ мѣстахъ разрѣзовъ [фиг. 4I], выражающія дѣйствіе одной половины на другую, замѣнимъ соответственными силами: нормальной силой N и парой силъ, съ моментомъ M ; поперечная же сила $T = 0$ въ силу симметріи.

Фиг. 4I



Замѣтимъ, что значенія M и N одинаковы для всѣхъ сѣченій.

Извѣстно, что равнодѣйствующая давленія на внутреннюю цилиндрическую поверхность равна давленію на ея проекцію $2r \cdot 1 \cdot p = 2r \cdot p$

Изъ условія равновѣсія рассматриваемой части цилиндра $|\sum y = 0|$, слѣдуетъ, что $2M - 2rz = 0$ отсюда опредѣляется величина нормальной силы

$$N = rz$$

Значеніе момента M найдемъ изъ того условія, что уголъ смежности $d\varphi$ между двумя произвольными меридіанальными сѣченіями при деформациі цилиндра сохраняетъ свою величину т.е., что $\Delta d\varphi = 0$ или, согласно первому уравненію формулы VI.

$$\frac{M}{J'} + \frac{M}{\omega \rho^2} + \frac{N}{\omega \rho} = 0$$

Откуда

$$M = - \frac{N \cdot J' \cdot \rho}{J' + \omega \rho^2} = - \frac{\rho \cdot z \cdot J' \rho}{J' + \omega \rho^2} \quad |38|$$

Зная теперь значенія M и N нетрудно вычислить напряженіе въ какой нибудь точкѣ на разстояніи y отъ оси бруса по формулѣ |з пун. 14|, а именно

$$n = \frac{N}{\omega} + \frac{M}{\rho \omega} + \frac{M}{J'} \cdot \frac{J}{1 + \frac{y}{\rho}} \quad \text{или,}$$

подставляя выше найденныя значенія,

$$n = \frac{\rho z}{\omega} - \frac{\rho \cdot z \cdot J'}{\omega (J' + \omega \rho^2)} - \frac{\rho z \cdot \rho^2 \cdot y}{(J' + \omega \rho^2) (\rho + y)} \quad \text{или}$$

$$n = \frac{\rho z \cdot \rho^2}{\mathcal{J}' + \omega \rho^2} - \frac{\rho \cdot z \cdot \rho^2 \cdot \gamma}{(\mathcal{J}' + \omega \rho^2)(\rho + \gamma)} \quad \text{ОКОНЧАТЕЛЬНО}$$

$$n = \frac{\rho \cdot z \cdot \rho^3}{(\mathcal{J}' + \omega \rho^2)(\rho + \gamma)} \quad \text{ГДѢ}$$

величина \mathcal{J}' определяется формулой IX , а именно:

$$\mathcal{J}' = a \rho^2 \left\{ \rho \cdot \lg \frac{2\rho + b}{2\rho - b} - b \right\}$$

Въ данномъ случаѣ: $a=1$; $b=R-z$ и

$$2\rho + b = (R+z) + (R-z) = 2R$$

$$2\rho - b = (R+z) - (R-z) = 2z$$

Слѣдовательно

$$\mathcal{J}' = \rho^2 \left\{ \rho \lg \frac{R}{z} - (R-z) \right\}$$

Но $\omega = (R-z) \cdot 1 = R-z$ поэтому

$$\mathcal{J}' + \omega \rho^2 = \rho^3 \lg \frac{R}{z}, \quad \text{СЛѢДОВАТЕЛЬНО}$$

$$n = \frac{\rho z}{(\rho + y) \lg \frac{R}{z}} \dots |39|$$

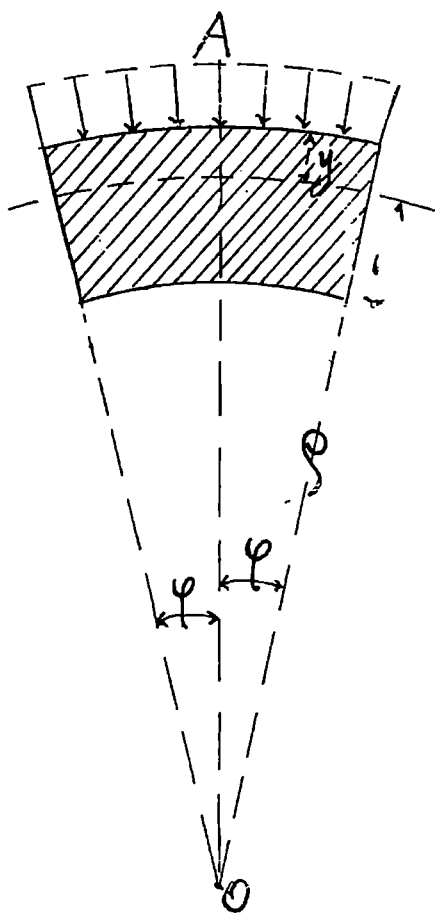
Теперь уже можно определить радиальное нормаль-

Фиг. 42.

ное давление n_y на цилиндрической поверхности радиуса

$\rho + y$. Для этого выдѣлимъ означенной поверхностью из цилиндра часть его, ограниченную двумя цилиндрическими поверхностями радиусовъ z и

$\rho + y$ и двумя меридианальными плоскостями, составляющими уголъ 2φ . На элементъ $1 dy$ меридианальнаго сѣченія цилиндра дѣйствуетъ нормальная элементарная сила $n dz$, которой проекція на ось AO равна $n dy \sin \varphi$; Сумма проекцій такихъ силъ въ обоихъ сѣченіяхъ равна



$$2 \int n dy \sin \varphi = 2 \sin \varphi \int n dy = \frac{2 \rho z \sin \varphi}{\lg \frac{R}{z}} \int_{\rho+y}^{\dots} dy$$

$$\text{но } \int_z^{\rho+y} \frac{dy}{\rho+y} = \left[\lg(\rho+y) \right]_z^{\rho+y} = \lg(\rho+y) - \lg z =$$

$$= \lg \frac{\rho+y}{z}$$

Слѣдовательно

$$2 \int n \sin \varphi d\varphi = 2 \rho z \sin \varphi \cdot \frac{\lg \frac{\rho+y}{z}}{\lg \frac{R}{z}}$$

Для равновѣсія необходимо, чтобы эта сила была равна и противоположна разности давленій, дѣйствующей на обѣихъ цилиндрическихъ поверхностяхъ разсматриваемаго отръзка. Такъ какъ давленіе на внутренней поверхности равно $2z \sin \varphi \cdot \rho$, а давленіе на поверхности радиуса $\rho+y$ равно $2(\rho+y) \sin \varphi \cdot n_y$,

$$\text{то } 2z \cdot \rho \sin \varphi - 2(\rho+y) \sin \varphi \cdot n_y =$$

$$= 2\rho z \cdot \sin \varphi \frac{\lg \frac{\rho+y}{z}}{\lg \frac{R}{z}}$$

откуда

$$N_y = \frac{\rho \cdot z \left[\lg \frac{R}{z} - \lg \frac{\rho + y}{z} \right]}{(\rho + y) \cdot \lg \frac{R}{z}} \dots |40|$$

Мы рассмотрѣли выше случай открытаго цилиндра, под
верженнаго внутреннему боковому давленію. При закры-
томъ цилиндрѣ, къ выше найденнымъ напряженіямъ N и N_y
нужно еще присоединить нормальное растягивающее напря-
женіе N_x |см. фиг. 4Ia| въ плоскости поперечнаго сѣче-
нія цилиндра, нормальной къ его продольной оси $|X|$.
Предполагая, что оно распределѣно равномерно по этому
сѣченію, мы можемъ опредѣлить его, раздѣляя давленіе
на днище, равное $\rho \cdot \pi \cdot z^2$ на площадь сѣченія

$$\omega_1 = \pi \cdot (R^2 - z^2)$$

цилиндра, т.е.

$$N_x = \frac{z^2 \cdot \rho}{R^2 - z^2} \dots |41|$$

Зная три нормальныхъ напряженія N , N_y , N_x по
тремъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, нетруд-
но найти составное напряженіе $|N_o|$ и повѣрить проч-
ность цилиндра. Такъ напримѣръ, для напряженій въ пло-
скости меридіанальнаго сѣченія составное напряженіе

$$n_0 = n - \eta n_x + \eta^x n_y \quad \dots |42|$$

Для элемента близь внутренней поверхности цилиндра

$$y = -(\rho - z); \quad n_y = \rho; \quad n = \frac{\rho}{\lg \frac{R}{z}}$$

Слѣдовательно

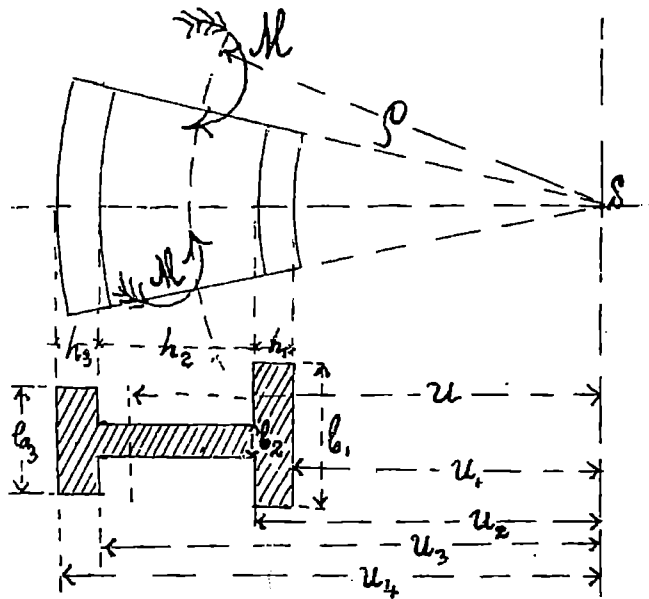
$$n_0 = \frac{\rho}{\lg \frac{R}{z}} + \eta \rho \left(1 - \frac{z^2}{R^2 - z^2} \right) \quad \text{или}$$

$$n_0 = \rho \left\{ \frac{1}{\lg \frac{R}{z}} + \frac{\eta (R^2 - 2z^2)}{R^2 - z^2} \right\} \quad \dots |43|$$

Примѣръ 2. Опредѣлить положеніе нейтральной оси при изгибѣ кривого бруса, двутавроваго сѣченія |фиг. 43|

x | η - постоянный коэффициентъ см. курсъ Сопротивленія Матер. проф. В.Н. Соколовскаго.

Фиг. 43.



Согласно условию $|\Phi|$ пун. 15 имѣемъ

$$\int \frac{z \cdot d\omega}{\rho + z} = \int \frac{(u - \rho) d\omega}{u} = 0$$

Принимая во вниманіе размѣры двутавроваго сѣченія и согласно обозначеніямъ фиг. 43, получимъ:

$$b_3 \int_{u_4}^{u_3} \frac{(u - \rho) du}{u} + b_2 \int_{u_3}^{u_2} \frac{(u - \rho) du}{u} + b_1 \int_{u_2}^{u_1} \frac{(u - \rho) du}{u} = 0$$

или

$$b_3 \left[(u_4 - u_3) - \rho \lg \frac{u_4}{u_3} \right] + b_2 \left[(u_3 - u_2) - \rho \lg \frac{u_3}{u_2} \right] +$$

$$+ b_1 \left[(u_2 - u_1) - \rho \lg \frac{u_2}{u_1} \right] = 0 \quad \text{откуда}$$

$$\rho = \frac{b_3 h_3 + b_2 h_2 + b_1 h_1}{b_3 \lg \frac{u_4}{u_3} + b_2 \lg \frac{u_3}{u_2} + b_1 \lg \frac{u_2}{u_1}} \quad |44|$$

Если обозначить через ρ_0 радиус срединной оси бруса, то разность $\pm (\rho_0 - \rho)$ укажет величину перемещения нейтральной оси от срединной оси бруса.

Величины напряжений найдутся из формулы σ |пун.15|

$$n = \epsilon \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{z}{\rho + z} = a \cdot \frac{z}{\rho + z}, \quad \text{примем}$$

$$M = \int n z d\omega = \epsilon \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{z^2 d\omega}{\rho + z} = a \int \frac{z^2 d\omega}{\rho + z}$$

$$\text{но } \int \frac{z^2 d\omega}{\rho + z} = \int \left(z - \frac{\rho z}{\rho + z} \right) d\omega =$$

$$= \int z d\omega - \rho \int \frac{z d\omega}{\rho + z}$$

но, согласно условию $|\phi|$

$$\int \frac{z d\omega}{\rho_0 + z} = 0$$

следовательно

$$M = a \int z d\omega = a \cdot S$$

где S - статический момент поперечного сечения относительно нейтральной оси, т.е.

$$S = \omega (\rho_0 - \rho)$$

где ω - площадь сечения поперечного сечения т.е.

$$\omega = b_3 h_3 + b_2 h_2 + b_1 h_1$$

Изъ послѣдняго равенства, опредѣляя величину a , получимъ

$$a = \frac{M}{S} \quad \text{и следовательно}$$

$$n = \frac{M}{S} \cdot \frac{z}{\rho_0 + z} \quad \dots |45|$$

Для крайних наружных волоконъ

$$\zeta = u_4 - \rho \quad \text{и слѣдовательно}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Eh}{S} \cdot \frac{u_4 - \rho}{u_4}$$

Для крайних внутренних волоконъ

$$\zeta = u_1 - \rho \quad \text{и}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{Eh}{S} \cdot \frac{(u_1 - \rho)}{u_1}$$

Отношеніе наибольшаго напряженія къ меньшему

$$\frac{\sigma_{\max.}}{\sigma_{\min}} = \frac{(u_4 - \rho) u_1}{(u_1 - \rho) u_4} \quad \dots \dots |46|$$

Г л а в а III

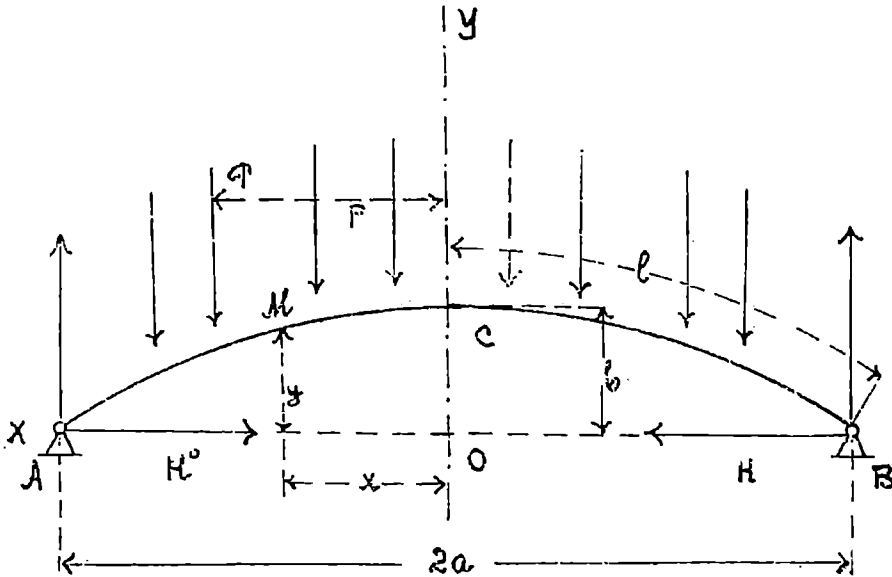
РАЗСЧЕТЪ АРОКЪ СПЛОЩНОГО СВЧЕНІЯ СЪ ШАРНИРАМИ ВЪ ПЯТАХЪ
Д В У Х Ш А Р Н И Р Н Ы Я А Р К И.

18 | ОБЩІЯ ДАННЫЯ И ВЫРАЖЕНІЕ ДЛЯ РАСПОРА. Разсмотримъ арку, постояннаго свченія и имѣющую шарнирныя неподвижныя опоры. Предположимъ кромѣ того, что арка симметричная и симметрично нагруженная вертикальными силами, лежащими въ плоскости оси арки. Сопротивленіе неподвижной шарнирной опоры вполнѣ опредѣляется, какъ известно, двумя элементами, а именно, ея величиной и направленіемъ, или двумя проекціями на координатныя оси, расположенныя произвольно въ плоскости дѣйствія силъ. Слѣдовательно, каждая неподвижная шарнирная опора даетъ двѣ неизвѣстныхъ величины, а для двухъ опоръ будемъ имѣть 4 неизвѣстныхъ; статика же даетъ лишь 3 уравненіе равновѣсія. Въ задачу такимъ образомъ входитъ одна статически неопредѣлимая величина.

Примемъ за координатныя оси: вертикаль OC и горизонталь AB |фиг. 44|; тогда вертикальныя проекціи $|A$ и B | опорныхъ сопротивленій могутъ быть прямо опре

дѣлены помощью уравненія моментовъ; онѣ будутъ тѣ же, что и въ простой балкѣ, несущей тѣ же грузы. Что же

Фиг. 44.



касается горизонтальныхъ проекцій $|H|$ опорныхъ сопротивленій, то, на основаніи законовъ статики, можно сказать только одно - онѣ должны быть равны и противоположны по направленію. Величину этихъ горизонтальныхъ проекцій или составляющихъ называютъ горизонтальнымъ распоромъ H арки, онъ то и представляетъ изъ себя ту статически неопредѣлимую величину, которую требуется опредѣлить. Дѣйствительно, какъ только распоръ будетъ извѣстенъ, сейчасъ же найдутся и изгибающіе моменты, сдвигающія и нормальныя силы для всѣхъ сѣченій, а слѣдовательно и напряженія для всѣхъ точекъ арки. Ограничимся поэтому прежде всего выводомъ распора

Н. Для рѣшенія применимъ теорему о наименьшей работѣ деформации и, ранѣе выведенныя, выраженія для потенциальной энергiи или работы деформации при изгибѣ кривыхъ стержней. Согласно доказанному ранѣе положенiю, общiй ходъ рѣшенія долженъ заключаться въ слѣдующемъ: необходимо выразить потенциальную энергiю или, что то же, работу деформации въ функцiи внѣшнихъ силъ, включая туда и статически неопредѣлимныя силы; затѣмъ написать, что производныя работы деформации по этимъ силамъ равны нулю. Полученныя такимъ образомъ условныя уравненiя дополняютъ недостающiя уравненiя статики и дадутъ возможность опредѣлить статически неопредѣлимныя силы.

Если пренебречь пока влiянiемъ температуры и принять, что радиусъ кривизны сравнительно великъ по сравненiю съ поперечными сѣченiями сплошной арки, то выраженiе работы деформации, согласно уравненiю 15 приметъ видъ:

$$V = \int_0^{\frac{\mathcal{L}}{2}} \frac{N^2 ds}{2E} + \int_0^{\frac{\mathcal{L}}{2}} \frac{M^2 ds}{2EJ} \dots |15|$$

Такъ какъ арка симметричная и симметрично нагруженная, то можно рассматривать любую половину арки; пусть половина длины арки, считая по ея оси, будетъ $\frac{\mathcal{L}}{2} = l$

тогда, выше приведенное, выражение напишется такъ:

$$V = 2 \int_0^l \frac{N^2 ds}{2 \cdot \epsilon \omega} + 2 \int_0^l \frac{M^2 ds}{2 \cdot \epsilon \mathcal{J}} \quad |15a|$$

гдѣ N нормальная сила, а M изгибающій моментъ. Выразимъ теперь M и N въ зависимости отъ внѣшнихъ силъ и статически неопредѣлимой силы H . Возьмемъ произвольную точку M съ координатами $|x$ и $y|$ |фиг. 44|. Изгибающій моментъ M относительно оси, проходящей черезъ взятую точку съ координатами $|x - y|$ выразится тогда такъ

$$M = M_1 - Hy \quad |47|, \text{ гдѣ } |Hy|$$

моментъ горизонтальнаго распора, а M_1 - моментъ вертикальныхъ силъ, активныхъ и пассивныхъ, приложенныхъ къ арке отъ рассматриваемой точки до одной изъ опоръ, т.е.

$$M_1 = A(a - x) - \sum \mathcal{P}(p - x)$$

Этотъ моментъ M_1 имѣетъ, слѣдовательно, тождественную величину съ тангенсомъ же, относительно точки съ абсциссой x прямого бруса, пролетомъ $AB = 2a$, опирающагося на двѣ опоры и подверженнаго тѣмъ же грузамъ, какъ и арка. Подставимъ пока найденное выраженіе M въ уравне

ние |15a|, тогда получимъ:

$$V = \left\{ \int_0^l \frac{N^2 ds}{2 \cdot \varepsilon \omega} + \int_0^l \frac{N_1^2 ds}{2 \cdot \varepsilon \gamma} - \int_0^l \frac{2 N_1 H y ds}{2 \cdot \varepsilon \gamma} + \int_0^l \frac{H^2 y^2 ds}{2 \cdot \varepsilon \gamma} \right\} 2 \quad \dots |15b$$

Составимъ частную производную уравненія |15b| по статически неопредѣлимой величинѣ H и приравняемъ ее нулю. Получимъ:

$$\frac{dV}{dH} = \int_0^l \frac{N}{\varepsilon \omega} \cdot \frac{dN}{dH} \cdot ds - \int_0^l \frac{N_1 y \cdot ds}{\varepsilon \gamma} + \int_0^l \frac{H y^2 \cdot ds}{\varepsilon \gamma} = 0 \quad \dots |15c|$$

Въ уравненіи |15c| приходится еще выразить N въ видѣ функции отъ H . Сдѣлать это не трудно, но, чтобы избѣгнуть длинныхъ формулъ, которыя въ практикѣ все равно не приходится употреблять, замѣтимъ, что въ очень пологихъ аркахъ, для которыхъ собственно и важна эта формула, такъ какъ въ нихъ H и N выходятъ особенно большими, N приблизительно равно $|-H|$. При этомъ упро-

шеніи получаемъ: $\frac{dN}{dH} = -1$ и рѣшеніе предыдущаго уравненія даетъ

$$H \int_0^l \frac{ds}{E\omega} - \int_0^l \frac{M_1 y ds}{EJ} + H \int_0^l \frac{y^2 ds}{EJ} = 0 \quad \text{откуда}$$

$$H = \frac{\int_0^l \frac{M_1 y ds}{EJ}}{\int_0^l \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_0^l \frac{ds}{E\omega}} \quad \dots |48|$$

Если коэффициентъ упругости E постоянный и принять, что сѣченіе арки на всемъ протяженіи также постоянно, то ω и J величины постоянныя и могутъ быть, вмѣстѣ съ E , вынесены изъ подъ знака интеграла. Введя кромѣ того, значеніе радиуса инерціи $r^2 = \frac{J}{\omega}$ и имѣя въ виду, что $\int_0^l ds = l$, получимъ значеніе для распора

$$H = \frac{\int_0^l M_1 y \cdot ds}{\int_0^l y^2 ds + lr^2} \quad \dots |49|$$

Если бы мы въ уравненіи |15а| работы деформации совсѣмъ бы пренебрегли вліяніемъ нормальной силы \mathcal{N} и за исходное уравненіе приняли бы сокращенное

$$\nu = \int_0^l \frac{\mathcal{M}^2 ds}{2 \cdot E J} \quad , \text{ то подобными же раз-}$$

сужденіями получили бы для выраженія распора величину:

$$H_1 = \frac{\int_0^l \mathcal{M}_1 y \cdot ds}{\int_0^l y^2 ds} \quad \dots \dots |50|$$

Слѣдовательно, вліяніе нормальной силы, при допущеніи, что оно равно распору, выражается въ уравненіи |49| членомъ νr^2 . Величина распора H_1 носитъ часто названіе главнаго распора и общій распоръ H можетъ быть выраженъ въ зависимости отъ H_1 слѣдующей формулой:

$$H = \frac{\int_0^l \mathcal{M}_1 y ds}{\int_0^l y^2 ds} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\nu r^2}{\int_0^l y^2 ds}} = H_1 \frac{1}{1 + \frac{\nu r^2}{\int_0^l y^2 ds}} \quad \dots |51|$$

ВЕЛИЧИНА

$$\frac{1}{1 + \frac{\rho z^2}{\int_0^l y^2 ds}}$$

носитъ названіе коэффиціента поправки, обозначимъ его черезъ K . Коэффиціентъ этотъ не зависитъ отъ грузовъ и меньше единицы.

19 | КОЭФФИЦИЕНТЪ ПОПРАВКИ. Для опредѣленія значенія коэффиціента

$$K = \frac{1}{1 + \frac{\rho z^2}{\int_0^l y^2 ds}} \quad \dots |52|$$

введемъ нѣкоторыя измѣненія для облегченія его вычисленія. Прежде всего значеніе

$$\frac{\rho z^2}{\int_0^l y^2 ds}$$

можно замѣнить ему

равнымъ

$$\frac{z^2}{\int_0^l \frac{y^2 ds}{l}}$$

дальше, если ар-

ка плоская, то безъ большой погрѣшности для практиче- скихъ вычисленій можно допустить замѣну $\frac{ds}{l}$ черезъ $\frac{dx}{a}$

Тогда

$$\int_0^l y^2 \frac{ds}{l}$$

приметь видъ

$$\int_0^a \frac{y^2 dx}{a} \quad \text{и вычисление его не}$$

представляет трудностей, если известно уравнение кривой оси арки. Такъ напримѣръ, если эта кривая - парабола съ вертикальной осью $|y|$ и съ вершиной въ точкѣ C [фиг. 44], то имѣемъ для нея уравненіе:

$$y = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad \text{гдѣ } b \text{ - подъёмъ или вы-}$$

ность арки.

Подставимъ теперь значеніе y въ подынтегральное выраженіе и произведемъ необходимыя вычисленія:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{y^2 dx}{a} &= \frac{1}{a} \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{b^2}{a} \left\{ \int_0^a dx - \int_0^a \frac{2x^2 dx}{a^2} + \int_0^a \frac{x^4 dx}{a^4} \right\} \quad \text{или} \end{aligned}$$

$$\int_0^a \frac{y^2 dx}{a} = \frac{b^2}{a} \left\{ a - \frac{2a^3}{3a^2} + \frac{a^5}{5a^4} \right\} = \frac{8}{15} b^2$$

Слѣдовательно получаемъ для K слѣдующее значеніе:

$$K = \frac{1}{1 + \frac{15z^2}{8b^2}} \dots |53|$$

Полученный коэффициент поправки может быть отнесенъ не только къ плоскимъ аркамъ съ параболической осью, но съ достаточной для практики точностью и къ плоскимъ аркамъ какой угодно формы. Такъ *Bresse* даетъ значеніе коэффициента K для арокъ съ осью по дугѣ круга:

$$K = \frac{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{b^2}{a^2}}{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{z^2}{b^2}} \dots |54|$$

Второй членъ числителя $\frac{1}{7} \cdot \frac{b^2}{a^2}$ не превышаетъ $\frac{1}{112}$, если $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{175}$ для $\frac{b}{a} = \frac{1}{5}$

По сравненію съ единицей значеніемъ $\frac{1}{7} \cdot \frac{b^2}{a^2}$ смѣло можно пренебречь и тогда получимъ прежнее значеніе для K . Такимъ образомъ каково бы ни была форма плоской арки мы можемъ принять за величины поправочнаго коэффициента K тѣ, которыя соответствуютъ или параболической аркѣ или аркѣ съ осью по дугѣ круга того же отворстія и подъема. Опредѣливъ такимъ образомъ величину поправочнаго коэффициента, распоръ арки будетъ опредѣ-

ленъ, если намъ будетъ известна величина H_1 , опре-
дѣляемая уравненіемъ |50| и зависящая отъ способа распре-
дѣленія внѣшнихъ силъ и формы кривой оси арки.

20| РАСПОРЪ АРКИ ПРИ РАВНОМѢРНОЙ НАГРУЗКѢ ЕЯ ГОРИ-
ЗОНТАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ. Если плоская арка съ параболиче-
ской осью или съ осью близкой къ параболѣ, то при рав-
номѢрномъ распредѣленіи нагрузки по ея горизонталь-
ной проекціи легко опредѣлить величину распоровъ H_1 и
 H . По уравненію |50| -

$$H_1 = \frac{\int_0^l M_1 y ds}{\int_0^l y^2 ds}, \text{ гдѣ } M_1 - \text{ моментъ}$$

тождественный съ моментомъ прямого бруса, пролетомъ = про-
лету арки, т.е. $2a$, опирающагося на двѣ опоры и под-
верженнаго тѣмъ же грузамъ, какъ и арка. Пусть равно-
мѢрная нагрузка будетъ p на I ед. пролета, тогда |фиг.
45| для момента M_1 , относительно любой точки съ абс-
циссой: x , имѣемъ:

$$M_1 = pa(a-x) - p(a-x) \cdot \frac{(a-x)}{2}$$

или
$$M_1 = \frac{pa^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

но
$$y = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

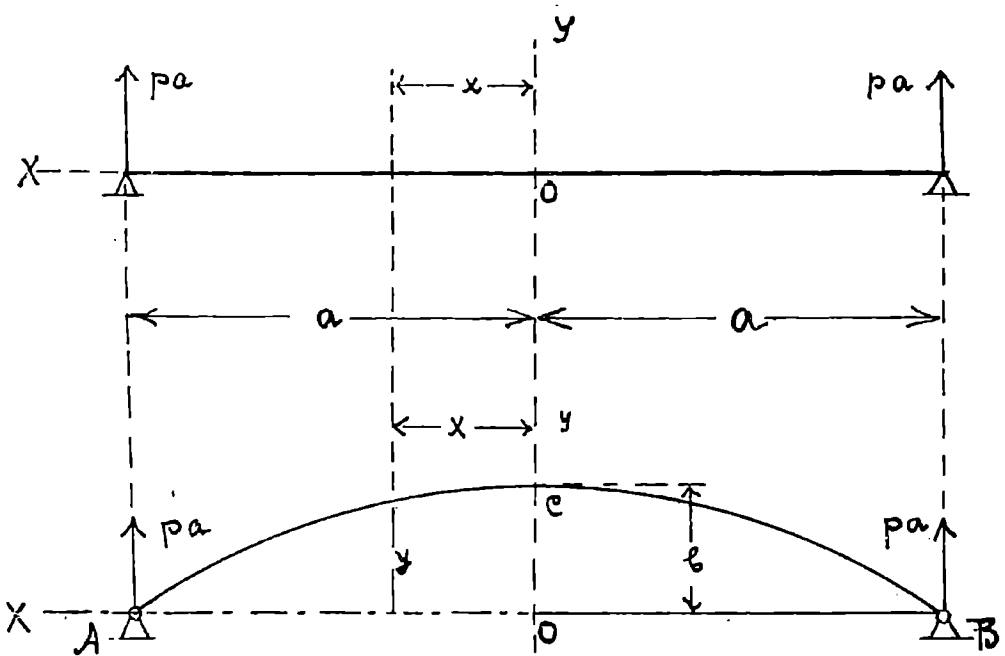
Слѣдовательно $M_1 = \frac{pa^2}{2b} \cdot y$

$$\int_0^l M_1 y ds = \frac{pa^2}{2b} \int_0^l y^2 ds$$

Тогда

$$H_1 = \frac{pa^2}{2b} \cdot \frac{\int_0^l y^2 ds}{\int_0^l y^2 ds} = \frac{pa^2}{2b} \quad . |55|$$

Фиг. 45.

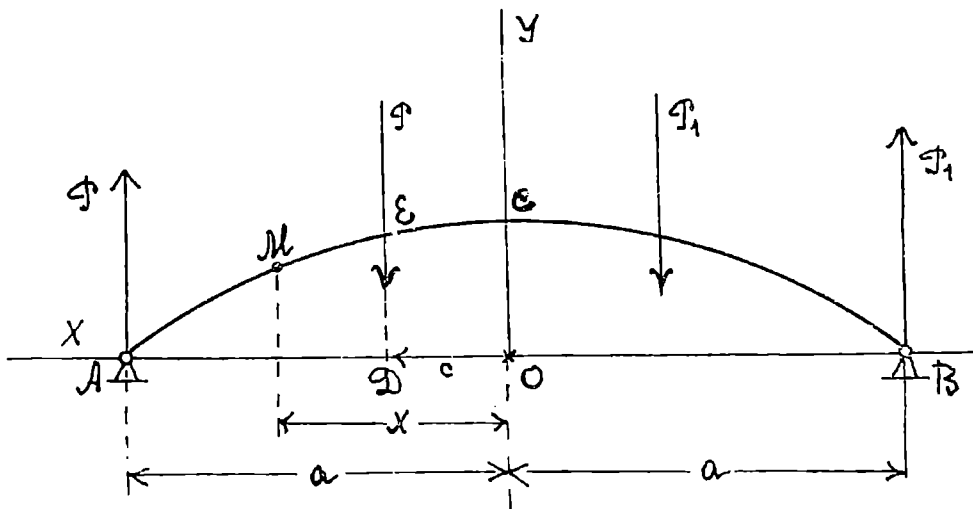


Принимая во вниманіе коэффициентъ поправки K по -
лучимъ:

$$H = H_i \cdot k = k \cdot \frac{pa^2}{2b} = k \frac{p(2a)^2}{8b} \quad \dots \quad |56|$$

21 | ПРИБЛИЖЕННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАСПОРА ПОЛОГИХЪ АРОКЪ ПРИ ДѢЙСТВІИ СОСРЕДОТОЧЕННАГО ГРУЗА: При пологихъ аркахъ величину главнаго распора H , при дѣйствии сосредоточеннаго груза P можно найти слѣдующимъ образомъ: Пусть ACB симметричная арка [фиг. 46], а P сосредоточенный грузъ, приложенный въ точкѣ E , въ разстояніи

Фиг. 46.



$OE = C$ отъ вершины параболы C , чтобы восстано-
 вить симметрію грузовъ, дѣйствующихъ на арку, и тѣмъ
 сдѣлать приложимыми, выведенныя ранѣе, формулы, прило-
 жимъ къ правой половинѣ арки симметрично расположен-
 ный съ P - грузъ P_1 , и по величинѣ равный ему, т.е.
 $P = P_1$. Распоръ, отнесенный къ этимъ двумъ грузамъ, будетъ оче-
 видно вдвое болѣе того, который относится бы къ одно-

му изъ этихъ грузовъ, взятыхъ отдѣльно, т.е. получимъ

$$2H_1 = \frac{\int_0^l M_1 y ds}{\int_0^l y^2 ds}$$

Дѣйствующій моментъ M_1 , около точки M , съ абсциссой x , равенъ:

$$M_1 = P(a-x) \text{ - когда } x > c \text{ и}$$

$$M_1 = P(a-x) - P(c-x) = P(a-c) \text{ - когда } x < c$$

| т.е. когда точка M взята между силой P и осью Y или между D и O | Такимъ образомъ интегралъ

$$\int_0^l M_1 y ds \quad \text{будетъ состоять изъ двухъ}$$

частей:

$$\int_0^{c\varepsilon} P(a-c) y ds \quad \text{и} \quad \int_{c\varepsilon}^{l\varepsilon} P(a-x) y ds$$

Допустимъ, что ось арки можетъ быть принята за параболу съ уравненіемъ $y = b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ и что она настолько плоско-ская, что безъ большой погрѣшности можно замѣнить ds черезъ dx . Тогда

$$2H_1 = \frac{\int_0^l M_1 ds}{\int_0^l u^2 ds} = \frac{\int_0^a M_1 dx}{\int_0^a u^2 dx}$$

подставляя сюда значение для момента M_1 , получимъ

$$2H_1 = \frac{\int_0^c \mathcal{P}(a-c) y dx + \int_c^a \mathcal{P}(a-x) y dx}{\int_0^a y^2 dx}, \text{ но}$$

$$\int_0^c \mathcal{P}(a-c) y dx = \int_0^c \mathcal{P}(a-c) b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = m_0$$

$$m_0 = \mathcal{P} \cdot b \left\{ \int_0^c a dx - \int_0^c \frac{x^2}{a} dx - \int_0^c c dx + \int_0^c \frac{x^2}{a^2} c dx \right\} =$$

$$= \mathcal{P} \cdot b \left\{ ac - \frac{c^3}{3a} - c^2 + \frac{c^4}{3a^2} \right\}$$

$$\int_c^a \mathcal{P}(a-x) y dx = \int_c^a \mathcal{P}(a-x) b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= \mathcal{P} b \cdot \left\{ a(x)_c^a - \left(\frac{x^3}{3a}\right)_c^a - \left(\frac{x^2}{2}\right)_c^a + \left(\frac{x^4}{4a^2}\right)_c^a \right\} = m_1$$

$$m_1 = \mathcal{P} \cdot b \left\{ \frac{5}{12} a^2 - ac + \frac{c^3}{3a} + \frac{c^2}{2} - \frac{c^4}{4a^2} \right\}$$

Тогда числитель. $m_0 + m_1 = \mathcal{P} b \left\{ \frac{5}{12} a^2 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{12a^2} \right\}$

Знаменатель: $\int_0^a \frac{y^2}{4} dx = \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx =$

$$= b^2 \left\{ (x)_0^a - \left(\frac{2x^3}{3a^2}\right)_0^a + \left(\frac{x^5}{5a^4}\right)_0^a \right\} = \frac{8}{15} ab^2$$

Слѣдовательно: $2H_1 = \frac{5b \left\{ \frac{5}{12} a^2 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{12a^2} \right\}}{\frac{8}{15} ab^2}$

или

$$H_1 = 5 \cdot \frac{5}{64} \cdot \frac{a}{b} \left\{ 5 - 6 \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^4}{a^4} \right\} \quad |57|$$

Это выраженіе для распора H_1 , данное Darcel 'омъ [Annales des Ponts et Chaussées 1862 г.], представляетъ приблизительно тѣ же результаты, что и упомянутые выше въ таблицѣ Bress 'а. Оно вполне можетъ замѣнить послѣднія и, чѣмъ арка положе, тѣмъ выведенное выраженіе для распора H_1 , точнѣе по результатамъ.

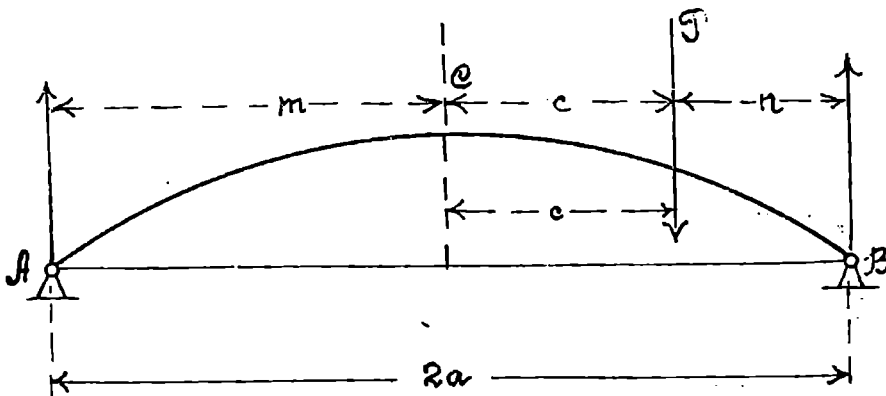
Умножая величину H_1 , на коэффициентъ поправки, по-

лучимъ значение распора: $H = H_1$ к

Часто расстояние груза берется не отъ середины арки, а отъ одной изъ опоръ, т.е. переносятъ координатныя оси въ эту опору. Въ этомъ случаѣ формула |57| измѣнится, а именно: пусть расстояние груза |фиг. 47| отъ лѣвой опоры (А) m ; тогда $a+c=m$ или $c=m-a$. Подставляя вмѣсто c его значение въ уравненіе |57| и производя необходимыя вычисленія получимъ:

$$H_1 = \mathcal{F} \cdot \frac{5}{64} \cdot \frac{(2a-m) \cdot m}{6a^3} (4a^2 + 2am - m^2) \quad |58|$$

Фиг. 47.



Выраженіе, стоящее въ скобкахъ уравненія |58| — $(4a^2 + 2am - m^2)$ измѣняется при передвиженіи груза \mathcal{F} , но это измѣненіе не особенно велико. При измѣненіи m въ предѣлахъ отъ нуля до $2a$ |величины пролета|, разность

$2am - m^2$ — мѣняется въ предѣлахъ отъ своей малой величины |т.е. нуля| до самой большой, равной a^2 х. Замѣнимъ эту переменную разность постоянной величиной, а именно среднимъ ея значеніемъ: $\frac{a^2}{2}$

Тогда величина въ скобкахъ $-(4a^2 + 2ma - m^2) = -4a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{9}{2}a^2$ и мы получаемъ приближительную формулу для опредѣленія главнаго распора H_1 :

$$H_1 = \frac{5}{64} \cdot \frac{g}{2} \cdot \frac{(2a-m) \cdot m}{b \cdot a} \cdot \rho \quad \text{или замѣняя}$$

$2a-m = n$ и считая величину $\frac{45}{128}$ приближенно равной $\frac{3}{8}$, получаемъ

$$H_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{m \cdot n}{b \cdot a} \cdot \rho \quad \dots \quad |59|$$

здѣсь слѣдовательно m и n разстоянія груза до опоръ. Эта формула принадлежитъ Энгессеру. Распоръ

$$H = k \cdot H_1 \quad \dots \quad |60|$$

Только что выведенной формулой можно также пользоваться — какъ и формулой *Darcel* — для пологихъ арокъ, хотя она еще болѣе приближенная, чѣмъ послѣдняя.

 х) Для опредѣленія максимума выраженія $2am - m^2$ беремъ первую производную по m и приравняемъ ее нулю т.е. $2a - 2m = 0$; отсюда $m_{max} = a$, подставляя получаемъ:
 $(2am - m^2)_{max} = 2a^2 - a^2 = a^2$

22 | ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАСПОРА ДВУХШАРНИР-
НОЙ АРКИ. До сихъ поръ мы рассматривали плоскія двух-
шарнирныя арки параболическія или съ осью по дугѣ кру-
га, принимаемыя безъ большой погрѣшности близкими къ
параболѣ.

Рассмотримъ теперь въ самомъ общемъ случаѣ арки
съ осью произвольной формы, пологія или повышенныя, за-
груженныя равномерно или неравномерно. Точное рѣшеніе
интеграломъ

$$\int_0^L M_1 y ds \quad \text{и} \quad \int_0^L y^2 ds$$

входящихъ въ выраженіе распора H_1 , въ этомъ случаѣ,
вообще говоря, затруднительно, а подчасъ даже и невоз-
можно. На практикѣ прибѣгаютъ поэтому къ приближеннымъ
способамъ вычисленія, пользуясь методомъ квадратовъ.
Для этого дѣлятъ длину дуги арки L на извѣстное число
мелкихъ частей ΔS и вычисляютъ для средней точки каж-
дой такой части ΔS - величины M_1 и y , а затѣмъ уже
и произведенія $|M_1 y \Delta S|$ и $|y^2 \Delta S|$ для всего про-
тяженія арки.

Вышеуказанныя вычисленія могутъ быть произведены
аналитическимъ и графическимъ способами. Одинъ изъ гра-
фическихъ приѣмовъ расчета будетъ указанъ ниже. Здѣсь
же необходимо добавить, что, когда вычисленія относят-
ся къ круговымъ аркамъ, то ds также, какъ dx и dy ,

могутъ быть выражены функциями угла при центрѣ и радиуса, и тогда интегралы можно рѣшить точно. Но вычисления эти довольно кропотливы и затруднительны. Эти вычисления были сдѣланы *M. Bress* омъ для случая равномерно распределенной нагрузки по горизонтали и для сосредоточеннаго груза, расположеннаго въ любой точкѣ круговой арки и имъ же для этихъ случаевъ составлены таблицы. Желающихъ подробно ознакомиться съ этими вычислениями и таблицами, мы отсылаемъ непосредственно къ его работѣ, ниже же приводимъ аналитическій сокращенный выводъ приближенныхъ формулъ для повышенныхъ круговыхъ арокъ, каковыя, вмѣстѣ съ рассмотрѣнными уже пологими арками, наиболѣе чаще встрѣчаются въ примѣненіи къ гражданскимъ сооруженіямъ.

23 | ПОВЫШЕННЫЯ КРУГОВЫЯ АРКИ.

Разсмотримъ сначала дѣйствіе сосредоточеннаго груза P . Ввиду того, что арка повышенная, можно вліяніемъ нормальной силы N пренебречь по сравненію съ дѣйствіемъ изгибающаго момента и за исходное уравненіе для работы деформациі принять [16]

$$V = \int_0^L \frac{M^2 ds}{2 EJ}$$

Подставляя, подобно предыдущему, значеніе

$$M = M_1 - Hy$$

въ уравненіе |16| и приравнявъ нулю на основаніи начала наименьшей работы первую производную отъ работы деформациі по неизвѣстной величинѣ распора H , получимъ при постоянныхъ величинахъ E и γ уравненіе:

$$\int_0^L M_1 y ds - H \int_0^L y^2 ds = 0$$

откуда

$$H = \frac{\int_0^L M_1 y ds}{\int_0^L y^2 ds}$$

гдѣ, какъ извѣстно, согласно |фиг.48| M_1 будетъ равенъ:

$$M_1 = \frac{P(l-m)}{l} \cdot x$$

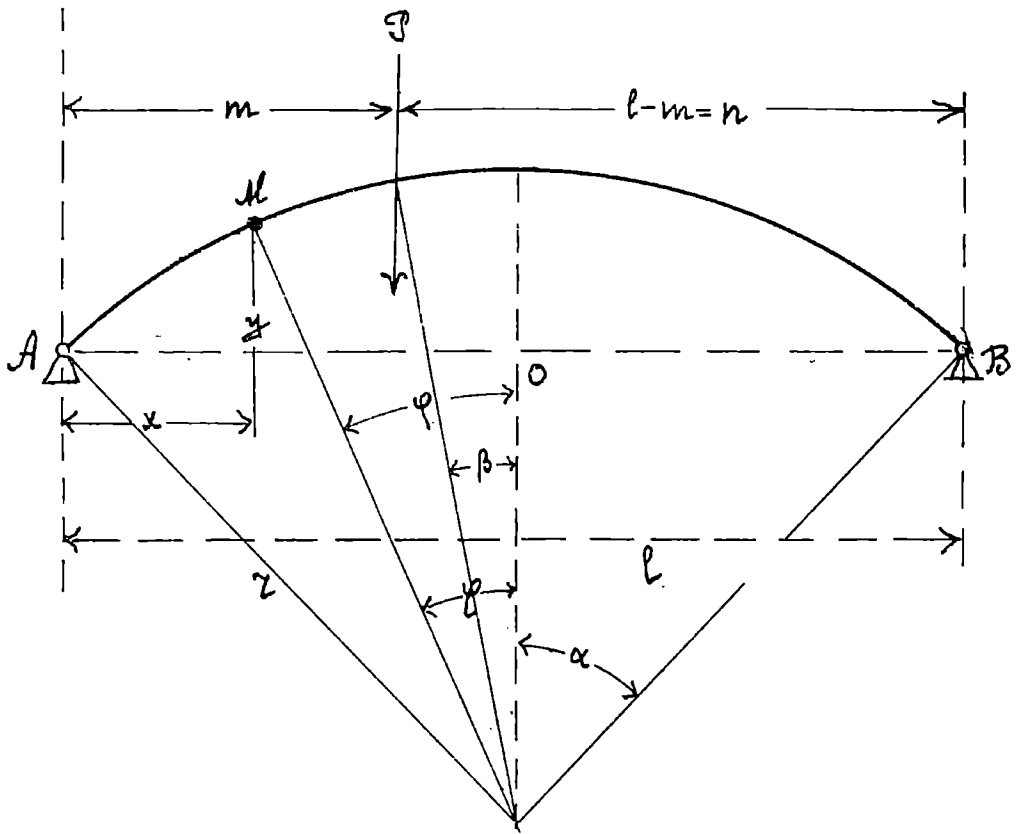
для точки M взятой влево отъ груза и

$$M_1 = P \cdot \frac{m}{l} \cdot (l-x)$$

для точки M взятой вправо отъ груза.

Тогда значеніе $\int_0^L M_1 y ds$ приметъ видъ:

Фиг. 48



$$\int_0^l M_y ds = \frac{P(l-m)}{l} \int_{x=0}^{x=m} x \cdot y ds +$$

$$+ \frac{P \cdot m}{l} \int_{x=m}^{x=l} (l-x) \cdot y \cdot ds$$

Для круговых арок удобнее вводить, какъ сказано выше, въ вычисленіе угловыя функціи. Пусть имется на фиг.

48 половина центрального угла α и радиус средней линии арки — z ; точка приложения нагрузки \mathcal{P} определяется углом β , а произвольное место точки M — углом φ

Тогда имеем: $ds = z d\varphi$

$$\left. \begin{aligned} \cdot l &= 2z \sin \alpha \\ \cdot m &= z (\sin \alpha - \sin \beta) \\ \cdot n &= l - m = z (\sin \alpha + \sin \beta) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= z (\sin \alpha - \sin \varphi) \\ l - x &= z (\sin \alpha + \sin \varphi) \\ y &= z (\cos \varphi - \cos \alpha) \end{aligned}$$

и значение H принимает тогда вид:

$$H = \left\{ \mathcal{P} z^3 \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2 \sin \alpha} \int_{\varphi=\beta}^{\varphi=\alpha} (\sin \alpha - \sin \varphi) (\cos \varphi - \cos \alpha) d\varphi + \right. \\ \left. + \mathcal{P} z^3 \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2 \sin \alpha} \int_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\beta} (\sin \alpha + \sin \varphi) (\cos \varphi - \cos \alpha) d\varphi \right\} : \\ : z^3 \int_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\alpha} (\cos \varphi - \cos \alpha)^2 d\varphi$$

Производя интегрирование и выражая полученные квадраты и произведения тригонометрических функций одного и того же угла через функции двойного получим:

$$H = \mathcal{P} \cdot \frac{-2 - 3 \cos 2\alpha - 2\alpha \sin 2\alpha + \cos 2\beta + 4 \cos \alpha (\cos \beta + \beta \cdot \sin \beta)}{4\alpha(2 + \cos 2\alpha) - 6 \sin 2\alpha} \quad |61|$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т.е.; когда имеется полуциркульная арка, довольно сложное уравнение |61| принимает простой вид:

$$H = \mathcal{P} \frac{1 + \cos 2\beta}{2\pi} \quad \dots \quad |62|$$

Если, вместо сосредоточенного груза \mathcal{P} будет дана равномерно распределенная нагрузка p по горизонтальной проекции, то, заменив в уравнении |61| \mathcal{P} через значение $p ds \cos \beta = p r \cos \beta d\beta$ и, интегрируя в пределах от $\beta = 0$ до $\beta = \alpha$, получим распор для случая равномерной нагрузки одной половины горизонтальной проекции арки в видѣ.

$$H = \frac{p \cdot r}{6} \cdot \frac{\sin \alpha (1 - \cos 2\alpha) - 6 \cos 2\alpha (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{4\alpha(2 + \cos 2\alpha) - 6 \sin 2\alpha} \quad |63|$$

При равномерной нагрузкѣ всей арки значение H будетъ вдвое большимъ. Для полуциркульной арки $\{\alpha = \frac{1}{2} \pi\}$ изъ уравненія |63| получимъ

$$H = \frac{2}{3\pi} p r = 0,212 p r \quad \dots \quad |64|$$

При полной нагрузкѣ:

$$H = 0,424 \rho z \quad \dots |65|$$

24| ВЛІЯНІЕ ИЗМѢНЕНІЯ ТЕМПЕРАТУРЫ. Ранѣе уже было доказано очень важное преимущество статически опредѣлимыхъ системъ сооружений, въ отношеніи отсутствія вліянія температуры на эти системы, т.е. отъ измѣненія температуры въ статически опредѣлимыхъ системахъ реакціи ихъ и внутреннія силы не мѣняются отъ нагрѣванія или охлажденія. Во всѣхъ другихъ системахъ, за очень рѣдкими исключеніями, повышение или пониженіе температуры вызываетъ уже перемѣну реакцій опоръ и измѣненіе напряженій частей. Въ особенности сильно замѣтно вліяніе температуры на измѣненіе реакцій и напряженій въ арочныхъ системахъ [за исключеніемъ трехшарнирной арки]. Такъ, двухшарнирная арка, вслѣдствіе неподвижности опоръ, не можетъ принять свою естественную форму при измѣненіи температуры. Вслѣдствіе этого при нагрѣваніи получается увеличеніе горизонтальнаго распора арки, а это вызываетъ увеличеніе напряженій во всѣхъ частяхъ арки. Такія увеличенія особенно значительны въ плоскихъ [пологихъ] аркахъ, стрѣла которыхъ составляетъ незначительную часть пролета арки. Арки съ большими подъемами въ срединѣ получаютъ сравнительно меньшія напряженія отъ измѣненія температуръ. Въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ вліянія измѣненія температуры намъ придется основываться

на нѣкоторыхъ гипотезахъ, а именно: мы допускаемъ, что имѣемъ дѣло съ изотропнымъ матеріаломъ, въ которомъ равномерное нагреваніе не допускаетъ перекашивания. Нагрѣтый прямоугольный брусокъ такого матеріала стремится расшириться одинаково по всѣмъ тремъ измѣреніямъ и, если этому нѣтъ препятствій, то всѣ размѣры его увеличиваются пропорціонально отношенію $[1 + \alpha t]$ къ единицѣ $|\alpha - \text{коэффициентъ расширения матеріала}|$. Если же имѣются препятствія такому расширенію, по направленію одного изъ трехъ размѣровъ бруска, то по этому направленію появится сжимающая сила, равная $|\epsilon \alpha t|$ пудовъ или килограммовъ на единицу сѣченія бруска. При охлажденіи получаютъ обратныя явленія. Величину коэффициента упругости ϵ будемъ считать постоянной, т.е. независящей ни отъ температуры, ни отъ величины силъ, растягивающихъ или сжимающихъ брусокъ.

За исходную или начальную температуру, отъ которой считаются измѣненія ея, вызывающія напряжения, примемъ ту температуру, при которой происходитъ сборка сооруженія. Затѣмъ наибольшее возможное пониженіе температуры указывается самой низкой температурой воздуха, которая можетъ быть зимой. Наибольшее повышеніе температуры произойдетъ конечно въ жаркіе лѣтніе дни. Для мостовыхъ сооруженій считаютъ измѣненія температуры въ предѣлахъ отъ $\pm 40^\circ$ до $\pm 50^\circ$ |считая по Цельсію| въ ту и другую сторону отъ начальной температуры. Для граж

данскихъ сооруженій можно допустить тѣ же измѣненія въ предѣлахъ отъ $\pm 20^\circ$ до $\pm 30^\circ$ по Цельсію.

25| ОБЩІЙ ПРИЕМЪ РѢШЕНІЯ. Вліяніе температуры можно разобрать различнымъ образомъ. Одинъ изъ способовъ состоитъ въ томъ, что устраняютъ мысленно статически неопредѣлимныя величины реакцій опоръ и затѣмъ находятъ естественное измѣненіе фигуры системы, происходящее отъ свободнаго удлиненія нагрѣтыхъ частей ея. Это разсмотрѣніе позволяетъ опредѣлить перемѣщенія тѣхъ точекъ фермы, которыя должны были бы опираться на опоры, но, вслѣдствіе указаннаго свободнаго удлиненія, оставили опоры. Затѣмъ нужно эти точки вернуть въ ихъ истинныя положенія на опорахъ, для чего потребуются извѣстныя силы. Эти силы будутъ дополнительныя реакціи, вызываемыя нагрѣваніемъ. Здѣсь, слѣдовательно, двѣ отдѣльныя задачи: одна геометрическая - нахожденіе измѣненія фигуры, при удлиненіи частей фермы; другая - механическая - нахожденіе силы, производящей извѣстныя перемѣщенія т.е. возвращающія опорныя точки на опоры. Вторая задача легко рѣшается помощью извѣстной уже намъ теоремы Костеліано [смотри уравненіе 16], которая даетъ, что производная $\frac{dV}{d\phi} =$ перемѣщенію φ . Если φ извѣстно изъ первой задачи, то это уравненіе можетъ послужить для нахожденія силы ϕ . Но и первая задача можетъ быть рѣшена помощью теоремъ механики. Мы въ лекціяхъ уже указывали на ту тѣсную связь, которая существуетъ между статикой и гео-

метріей, а равно и на то, что часто законы статики доставляютъ лучшей и скорѣйшей способъ доказательства геометрическихъ теоремъ. Для достиженія этого и въ данномъ случаѣ, предположимъ, что у насъ получились такія же удлиненія, какъ отъ нагрѣванія, но, что они вызваны механическимъ путемъ, т.е. внѣшними силами. Для этого присоединимъ къ дѣйствующимъ нагрузкамъ еще для каждаго бруска фиктивную растягивающую или сжимающую силу

$$E\omega\alpha t$$

Здѣсь ω - площадь поперечнаго сѣченія, t - въ градусахъ показываетъ насколько нагрѣлся или охладился брусокъ; при нагрѣваніи сила $E\omega\alpha t$ - растягивающая, при охлажденіи - сжимающая. Назначая такія силы, мы предполагаемъ, что нашъ брусокъ прямой, имѣетъ постоянное сѣченіе и вездѣ нагрѣтъ одинаково, причемъ боковыя поверхности бруска свободны и не подвержены дѣйствию силъ. Если же онъ не прямой, или не постояннаго сѣченія, или температура его не вездѣ одинакова, то тогда его нужно разбить на бесконечно малые элементы и приложить по длинѣ каждаго элемента фиктивныя силы $E\omega\alpha t$, изменяющіяся пропорціонально площади элемента и пропорціонально тому числу градусовъ t , на сколько этотъ элементъ нагрѣтъ

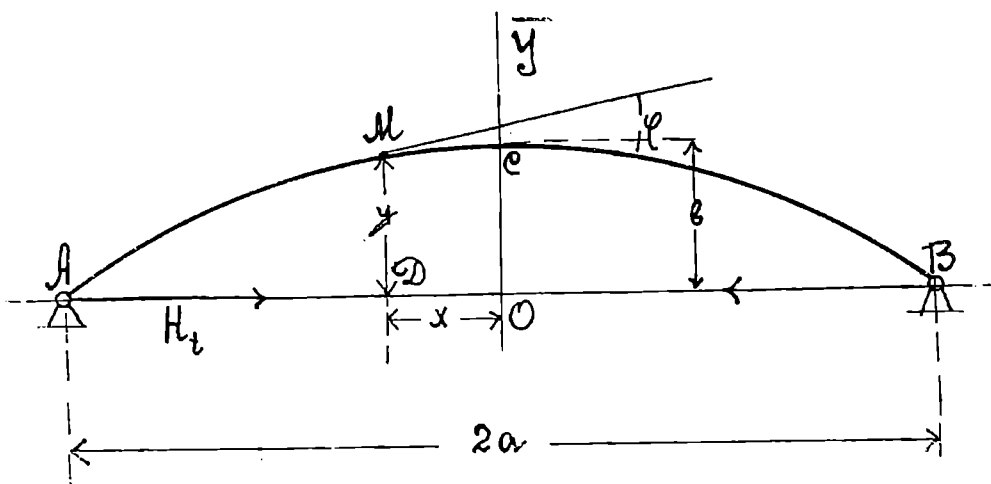
Вводя такимъ образомъ въ систему фиктивныя силы, производящія тѣ же измѣненія, что и измѣненія темпера -

туръ, мы получаемъ систему подверженную исключительно дѣйствию механическихъ силъ. Въ такой системѣ мы можемъ прикладывать всѣ извѣстныя намъ теоремы и способы для нахождения реакцій опоръ и другихъ статически неопредѣлимыхъ величинъ системы. Нужно только помнить, что, по окончаніи вычисленій, необходимо изъ всѣхъ найденныхъ внутреннихъ напряженій вычесть величины *Еат* ^{пуд.} ----- или килогр. на квадратную единицу площади сѣченія, представляющія результатъ дѣйствія фиктивныхъ силъ. Подобный приемъ замѣны термическихъ явленій, механическими ввелъ въ Строительную механику Меланъ. Примѣняя такой приемъ и въ данномъ случаѣ, мы можемъ пользоваться любой изъ извѣстныхъ теоремъ, или началомъ наименьшей работы, какъ дѣлаетъ Меланъ, или теоремой Кастеліано, или теоремой взаимности, или приемомъ Мора.

Вернемся теперь непосредственно къ двухшарнирнымъ аркамъ и примѣнимъ начало наименьшей работы или принципъ производной работы деформациі.

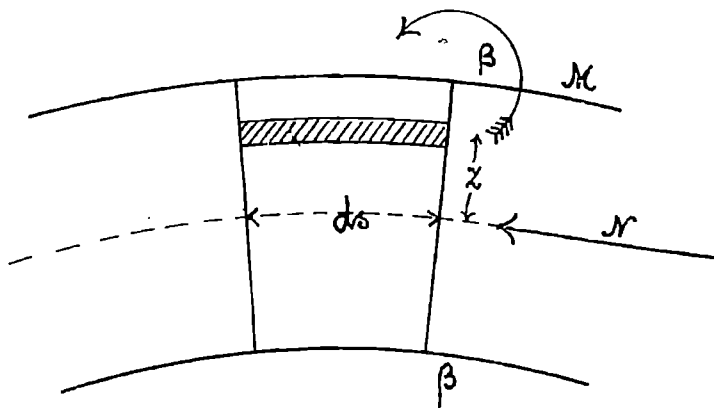
26 | ОБЩІЙ ВЫВОДЪ УРАВНЕНІЯ ДЛЯ ОПРЕДѢЛЕНІЯ ВЛІЯНІЯ ИЗМѢНЕНІЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ДВУХШАРНИРНОЙ АРКИ. Пусть имѣется двухшарнирная арка сплошного сѣченія; равномерное нагрѣваніе на t° . Такъ какъ вліяніе вѣшнихъ нагрузокъ было уже выяснено ранѣе, то здѣсь займемся только опредѣленіемъ вліянія измѣненія температуры, и потому предположимъ, что арка ненагружена. Обозначимъ |фиг. 49| ко-

Фиг. 49.



через H_t . Согласно сказанному выше, необходимо, для сведения рѣшенія данной задачи въ циклѣ статическихъ задачъ, къ каждому волокну арки приложить фиктивные силы $\epsilon \alpha t$ на квадратную единицу, которая будемъ считать положительными, если производятъ растягиваніе |на-

Фиг. 50.



грѣваніе арки на t° |м отрицательными, если сжатіе |охлажденіе арки на t° |. Возьмемъ произвольное сѣченіе арки β |фиг.50| дѣйствию части, отдѣляемой этимъ

сѣченіемъ на волокна, прилегающія къ сѣченію выразится

нѣкоторой сжимающей силой N и моментомъ M . Поэтому напряженіе нѣ котораго волокна будетъ $-\frac{N}{\omega} - \frac{Mz}{J}$ | знакъ минусъ означаетъ сжатіе | | ω - площадь сѣченія; J - моментъ инерціи сѣченія |. Сюда нужно прибавить фиктивные | положимъ | растягивающія силы ϵ_{ext} и мы получимъ полное напряженіе:

$$\epsilon_{ext} - \frac{N}{\omega} - \frac{Mz}{J} = n_0$$

Если площадь волокна есть $d\omega$, а длина ds^x , то потенциальная энергія или работа деформациі его будетъ

$$\frac{n_0^2 d\omega ds}{2 \epsilon} = \left(\epsilon_{ext} - \frac{N}{\omega} - \frac{Mz}{J} \right)^2 \frac{d\omega \cdot ds}{2 \cdot \epsilon}$$

Для полученія работы деформациі всѣхъ волоконъ, прилегающихъ къ сѣченію | $\beta \beta$ | возьмемъ интеграль, т.е.

$$dW = \iint \left\{ \epsilon_{ext} - \frac{N}{\omega} - \frac{Mz}{J} \right\}^2 \frac{d\omega \cdot ds}{2 \epsilon} = \frac{ds}{2 \epsilon} \iint \left\{ \epsilon_{ext} - \frac{N}{\omega} - \frac{Mz}{J} \right\}^2 d\omega$$

Для полученія же работы деформациі всей арки интегрируемъ еще разъ полученное выраженіе по всей длинѣ арки L . Окончательно получаемъ:

х | Вліяніемъ кривизны на отдѣльныя волокна пренебрегаемъ и считаемъ, что длина волокна въ разстояніи Z отъ срединной оси равна длинѣ волокна по оси, т.е. ds |

$$V = \int_0^L \frac{ds}{2E} \left\{ \varepsilon \alpha t - \frac{N}{\omega} - \frac{Mz}{J} \right\}^2 ds \quad \dots |66|$$

Примѣняя начало наименьшей работы, мы должны дифференцировать это выраженіе по искомой неизвѣстной H_t . Какъ величина силы N , такъ и моментъ M , зависятъ отъ распора H_t , слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\frac{dV}{dH_t} = - \int_0^L \frac{ds}{E} \left\{ \varepsilon \alpha t - \frac{N}{\omega} - \frac{Mz}{J} \right\} \left\{ \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dN}{dH_t} + \frac{z}{J} \cdot \frac{dM}{dH_t} \right\} ds |67|$$

Для дальнѣйшаго разбора вопроса необходимо назначить геометрическую фигуру оси арки; она опредѣляетъ зависимость N и M отъ распора H_t . Доведемъ вычисленіе до конца, для случая параболической арки.

27 | СЛУЧАЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АРКИ. Сдѣлаемъ, подобно предыдущему, допущенія, что площадь поперечнаго сѣченія арки и моментъ инерціи его одинаковы по всей длинѣ арки. Точно также допустимъ замѣну ds черезъ dx - что не ведетъ къ замѣтнымъ практическимъ ошибкамъ, въ тѣхъ случаяхъ, когда арка достаточна пологая, т.е. именно тогда, когда сказывается наибольшее вліяніе температуры. Уравненіе параболы, отнесенное къ осямъ $|yOx|$ фиг. 49 будетъ:

$$y = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

Моментъ M для какой нибудь точки M съ координатами x y |фиг. 49| будетъ

$$M = -R_t \cdot y \quad | \text{знакъ минусъ, по-}$$

тому что вращение противоположное часовой стрѣлкѣ |.

Сжимающая сила N будетъ,

$$N = R_t \cos \varphi \quad \text{гдѣ } \varphi \text{ - есть уголъ}$$

между касательной въ любой точкѣ оси арки и направле-
ніемъ силы R_t . Такъ какъ мы допустили замѣну ds че-
резъ dx , т.е. приравняли элементъ дуги ds ея проек-
ціи dx , то, при такой степени приближенія, должны счи-
тать, что $\cos \varphi = 1$ т.е.

$$R_t = N$$

При этомъ получаемъ теперь:

$$\frac{dM}{dR_t} = -y; \quad \frac{dN}{dR_t} = 1$$

Вставимъ полученные частныя значенія въ уравненіе 67, при-
чемъ, сообразуясь съ допущеніями, предѣлами интегри-
рованія будутъ 0 и a , получаемъ слѣдующій результатъ

$$\frac{dW}{dR_t} = - \int_0^a \frac{dx}{E} \left\{ \varepsilon \alpha t - \frac{R_t}{\omega} + \frac{R_t \cdot y \cdot z}{J \sigma} \right\} \left\{ \frac{1}{\omega} - \frac{z}{J} y \right\} dx$$

Согласно принципу наименьшей работы

$$\frac{dW}{dH_t} = 0$$

следовательно, раскрывая скобки подъ интеграломъ, получимъ:

$$\int_0^a \frac{dx}{E} \left\{ \frac{E \alpha t}{\omega} - \frac{H_t}{\omega^2} + \frac{H_t \cdot y \cdot z}{J \omega} - E \alpha t \frac{z}{J} y + \frac{H_t}{\omega} \cdot \frac{z}{J} y - H_t \cdot \left(\frac{z}{J} \right)^2 y^2 \right\} d\omega = 0$$

Производя теперь первое интегрирование, и имѣя въ виду, что

$$\int d\omega = \omega; \quad \int z d\omega = 0 \quad \text{и} \quad \int z^2 d\omega = J = \omega z^2$$

| гдѣ J - плечо или радиусъ инерціи поперечнаго сѣченія |, получаемъ:

$$\int_0^a \frac{dx}{E} \left\{ E \alpha t - \frac{H_t}{\omega} - \frac{H_t}{\omega} \cdot \frac{y^2}{z^2} \right\} = 0$$

Коэффициентъ упругости E , какъ величина постоянная, вынесется изъ подъ знака интеграла и пропадаетъ, благодаря равенству

Производя последнее интегрирование, получаетъ:

$$\int_0^a \varepsilon \alpha t dx - \int_0^a \frac{H_t}{\omega} dx - \int_0^a \frac{H_t}{\omega} \cdot \frac{y^2}{z^2} dx =$$

$$= \varepsilon \alpha t a - \frac{H_t}{\omega} a - \frac{H_t}{\omega z^2} \int_0^a y^2 dx = 0$$

Откуда получаемъ:

$$H_t = \frac{\varepsilon \alpha t \omega \cdot z^2 a}{\int_0^a y^2 dx + a z^2}$$

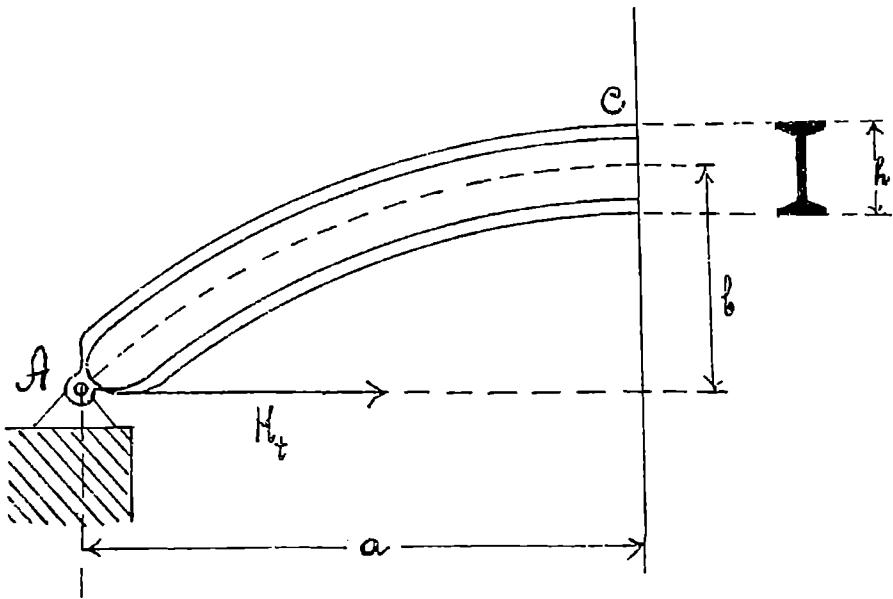
Но $\int_0^a y^2 dx$, какъ известно изъ предыдущаго (см. § 21) равенъ $\frac{8}{15} a b^2$, гдѣ b - стрѣла оси арки или ея подъемъ. Подставляя значеніе интеграла въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$H_t = \frac{\varepsilon \alpha t \cdot \omega \cdot z^2 \cdot a}{a z^2 + \frac{8}{15} a b^2}$$

или, послѣ сокращенія,

$$H_t = \frac{\varepsilon \alpha t \cdot \omega}{1 + \frac{8}{15} \cdot \frac{b^2}{z^2}} \quad |68|$$

Примѣръ. Пусть |фиг. 51| дана двухшарнирная арка двутавроваго



сплошного сѣченія высотой h , составляющей $\frac{1}{30}$ пролета $|2a|$. Стрѣла $b = \frac{1}{8} \cdot 2a$ или $\frac{1}{4}a$. Пролетъ $2a = 9 \text{ mtr}$. Коэффициентъ расширения $\alpha = 0,000012$, коэффициентъ упругости $E = 2000000$ кил. на \square сан., $t = 30^\circ$. Определить распоръ отъ температуры и добавочныя напряжения.

Согласно даннымъ, имѣемъ, что

$$h = \frac{1}{30} \cdot 2a = \frac{9}{30} \text{ mtr} = 300 \text{ mm}.$$

Площадь, соответственную этой высотѣ двутавровой балки, ω примемъ равной 72 кв. сант. Допуская приближенно моментъ инерціи $J = \frac{1}{4} \omega h^2$, получимъ радиусъ инерціи

$$r = \frac{1}{2} h \text{ тогда } b = \frac{1}{4} a = \frac{15}{4} h \text{ и}$$

$$\frac{b^2}{r^2} = \frac{15^2 h^2 \cdot 4^2}{4^2 \cdot h^2} = 15^2; \text{ следовательно}$$

$$H_t = \frac{\varepsilon \alpha t \cdot \omega}{1 + \frac{8}{15} \cdot \frac{b^2}{2^2}} = \frac{\varepsilon \alpha t \cdot \omega}{1 + 8 \cdot 15} \quad \text{или}$$

$$H_t = \frac{2000000 \times 0,0000012 \times 30 \times 72}{121} \approx 429 \text{ кг.}$$

Наибольшее по числовой величинѣ напряженіе отъ температуры получается въ вершинѣ арки С ; обозначимъ его черезъ $-n$, тогда

$$-n = \frac{\mathcal{N}}{\omega} + \frac{Mx}{J} = \frac{\mathcal{N}}{\omega} + \frac{H_t \cdot b \cdot h \cdot 4}{2 \cdot \omega h^2} \quad \text{или}$$

$$-n = \frac{\mathcal{N}}{\omega} + \frac{2 \cdot H_t \cdot b}{\omega \cdot h}$$

какъ сказано выше, для пологихъ арокъ можно \mathcal{N} принять равнымъ H_t , тогда

$$-n = \frac{H_t}{\omega} \left(1 + \frac{2b}{h} \right)$$

Подставляя числовыя величины, получаемъ.

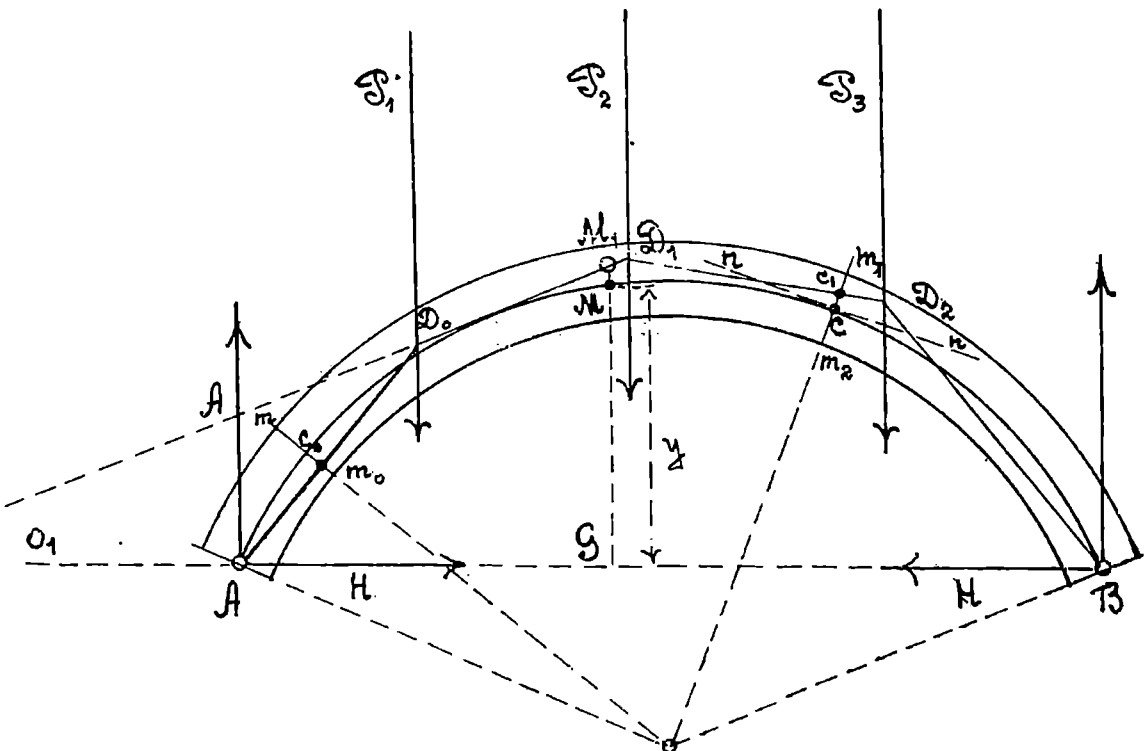
$$-n = \frac{429}{72} \left(1 + \frac{2 \cdot 15 \cdot h}{4h} \right) = \frac{429 \cdot 17}{72 \cdot 2} \approx 50 \text{ килогр.}$$

на I кв. сент.

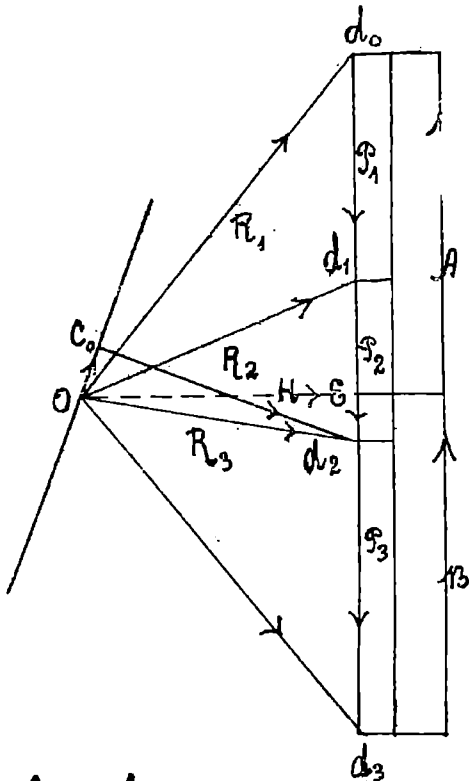
28 | КРИВАЯ ДАВЛЕНИЯ ВЪ ДВУХШАРНИРНЫХЪ АРКАХЪ СПЛОШНОГО СЪЧЕНІЯ. Въ § 18 мы указали на то, что разъ будетъ найденъ распоръ H арки, то для любого сѣченія ея легко опредѣлить тогда изгибающій моментъ, нормальную и сдвигающую силы, дѣйствующія въ этомъ сѣченіи. Умѣя находить теперь величину распора, покажемъ какъ же опредѣлять выше названныя величины для произвольнаго сѣченія.

Пусть на |фиг. 52| дана арка подѣйствіемъ вертикальныхъ сосредоточенныхъ грузовъ P_1 , P_2 и P_3 , для которой величины опорныхъ сопротивленій A и B и распора H опредѣлены на основаніи изложеннаго ранѣе.

Фиг. 52.



Фиг. 53.



Рассмотрим участок арки между ее опорой A и точкой приложения первого груза P_1 . На любое сечение этого участка слева действуют только силы A и H , или их равнодействующая R_1 . Величину и направление этой равнодействующей легко определять графически, а именно, отложим по вертикали $d_0 d_3$ - величину сопротивления опоры

$A = d_0 \varepsilon$, а на перпендикуляр, восстановленном к этой линии в точке ε , величину $O\varepsilon = H$, тогда величина Od_0 равна по величине силе R_1 , направление же ее определится стрелкой на основании правила сложения сил.

Если теперь на чертеже арки |фиг. 52| из точки A провести Ad_0 параллельно силе R_1 , до пересечения с силой P_1 , то получим для любого сечения m, n точку приложения C_0 , действующей в этом сечении силы, ее направление, совпадающее с направлением Ad_0 и величину силы R_1 |из Δ сил $Od_0 \varepsilon$ |. На участке арки, между силами P_1 и P_2 , равнодействующая сила R_1 будет уже меняться, как по величине, так и по направлению, потому что на этом участке к действию рав-

действующей силы R_1 , присоединяется действие сосредото-
 ченного груза P_1 . Если по вертикаль $d_0 d_3$ отложить
 от точки d_0 по величинѣ и направленію силу P_1 , т.е.
 $d_0 d_1 = P_1$, то, на основаніи правила сложения силъ, за-
 мыкающая сторона Od_1 треугольника силъ $Od_0 d_1$ выра-
 зитъ по величинѣ и направленію равнодействующую силу R_2
 [изъ силъ R_1 и P_1]. действующую на участкѣ арки меж-
 ду силами P_1 и P_2 . Проводя на фиг. 52 изъ точки пе-
 ресѣченія $|D_0|$ силъ R_1 и P_1 , линію $D_0 D_1$ параллель-
 ную силъ $R_2 = Od_1$, получимъ возможность, какъ и для
 перваго участка арки, опредѣлить для любого сѣченія вто-
 рого участка точн. приложенія и направленіе действующей
 въ этомъ сѣченіи силы и по величинѣ равной R_2 [изъ
 треуг. силъ $Od_0 d_1$]. Производя далѣе подобное же по-
 слѣдовательное построеніе для слѣдующихъ участковъ, по-
 лучимъ вариньоновскій многоугольникъ силъ съ полюсомъ O .
 [фиг. 53] и веревочный многоугольникъ $AD_0 D_1 D_2 B$ [фиг.
 52]. Этотъ веревочный многоугольникъ $AD_0 - B$ носитъ
 названіе многоугольника давленій. Построеніе многоуголь-
 ника давленія, слѣдовательно, на основаніи вышеизложен-
 наго, разъ извѣстна величина распора R - очень про-
 сто. Для этого откладываютъ по вертикаль отъ произволь-
 ной точки d_0 величины внѣшнихъ силъ, въ послѣдова-
 тельномъ ихъ порядкѣ, и величины сопротивленія опоръ A
 и B , т.е. строятъ замкнутый многоугольникъ внѣшнихъ
 активныхъ и пассивныхъ силъ. Затѣмъ на линіи OE , пер-

пендикулярной къ линіи силъ $d_0 d_3$ и проходящей черезъ точку E - пересѣченія пассивныхъ силъ A и B , берутъ полюсъ O въ разстояніи $OE = h$ и строятъ лучи $R_1, R_2, R_3 \dots$. Проводя на чертежѣ арки линіи $AD_0, D_0 D_1 \dots$ параллельныя этимъ лучамъ до встрѣчи ихъ съ соотвѣтственными силами $P_1, P_2 \dots$ получимъ кривую давленія $AD_0 - D_2 B$. Такъ какъ пассивныя силы и распоръ h всегда проходятъ черезъ центры шарнировъ, то эти двѣ точки являются въ двухшарнирныхъ аркахъ постоянными точками, черезъ которыя обязанъ пройти многоугольникъ давленій. Слѣдовательно, разъ величина распора h найдена правильно, то при построеніи, въ порядкѣ слѣва на право, послѣдняя сторона многоугольника давленія $D_2 B$ должна пройти черезъ центръ опорнаго шарнира B , т.е. черезъ точку B . Имѣя многоугольникъ давленій можно для любой точки M |фиг. 52| оси арки опредѣлить величину дѣйствующаго момента M . Дѣйствительно, согласно уравненію 47. $M = M_1 - h \cdot y$, приче-
 $y = Mg$, а M_1 есть тождественная величина момента для балки, пролетомъ AB , опирающейся свободно на двѣ опоры и нагруженной тѣми же грузами P_1, P_2, P_3 . Величина момента M_1 равна $B M_1 g$ |Смотри Строит.

х | M_1 , можно опредѣлить изъ слѣдующихъ соображеній: Пусть равнодѣйствующая активныхъ и пассивныхъ силъ, дѣйствующихъ слѣва точки M будетъ B , тогда $B = A - P_1$

Мех. проф. Соколова | . Следовательно, $M = M_1 - H_y =$
 $= H \cdot M_1 g - H \cdot M g = H (M_1 g - M g) = H \cdot M \cdot g$. Ниже будетъ
указано другое выраженіе для величины момента.

Если будетъ дана сплошная равномерная или нерав-
номерная нагрузка, то для построенія многоугольника дав-
ленія поступаютъ точно также, какъ было только что ука-
зано для сосредоточенныхъ грузовъ. Для этой цѣли арку
дѣлятъ на известное число малыхъ частей и нагрузки, при-
ходящія на каждую такую часть, рассматриваютъ, какъ со-
средоточенные грузы, приложенные въ центрахъ тяжести
соответственныхъ частей.

Чѣмъ на большее число частей будетъ разбита арка
съ отдельными грузами, тѣмъ съ большимъ числомъ сто-
ронъ, конечно, будетъ многоугольникъ давленій. При без-
конечно большомъ числѣ дѣленій многоугольникъ давленій
превращается въ кривую и носитъ обобщенное названіе кри-
вой давленія; въ дальнѣйшемъ мы будемъ пользоваться
этимъ названіемъ. Видъ кривой давленія и положеніе ея
относительно оси арки будетъ зависѣть отъ характера и

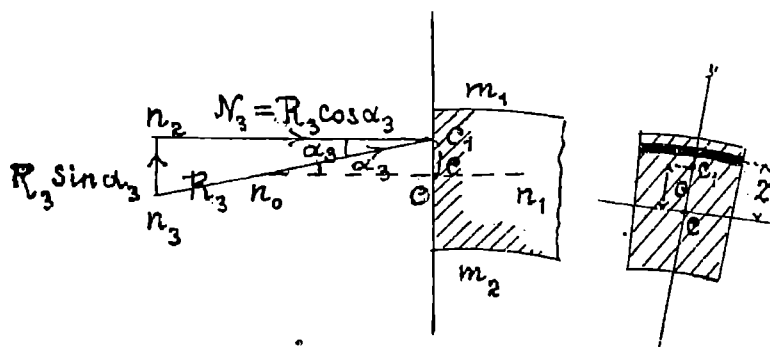
или по фиг. 53 $B = d_1 \varepsilon - d_0 d_1 = d_1 \varepsilon$ направленіе B па-
рал. силамъ A и Q_1 , а точка приложенія O , нахо-
дится на пересѣченіи сторонъ $D_0 D_1$ и AB . Далѣе

$\Delta M_1 g O_1 \sim \Delta O d_1 \varepsilon$ следовательно $\frac{d_1 \varepsilon}{O \varepsilon} = \frac{M_1 g}{O_1 g}$ или

$\frac{B}{H} = \frac{M_1 g}{O_1 g}$; откуда $B \cdot O_1 g = H \cdot M_1 g$ но $B \cdot O_1 g = M_1$

величины, дѣйствующихъ на арку, усилій. Такъ, вся кривая давленія можетъ расположиться снаружи или внутри, или частью снаружи, частью внутри относительно оси арки. Имѣя, такимъ образомъ, кривую давленія и вариньоновскій многоугольникъ силъ съ полюсомъ O - мы можемъ опредѣлить всѣ дѣйствующія усилія въ любомъ сѣченіи арки, а слѣдовательно и произвести повѣрку прочности его. Такъ, если взять произвольное сѣченіе $m_1 m_2$ |фиг. 52|, то точка приложенія, дѣйствующаго въ этомъ сѣченіи, усилія будетъ пересѣченіе кривой давленія съ этимъ сѣченіемъ, т.е. точка C_1 : направленіе дѣйствія усилія будетъ совпадать со стороною $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$ кривой давленія, величина же усилія опредѣлится изъ многоугольника силъ съ полюсомъ O и будетъ равна $R_3 = O d_2$. На фиг. 54 для ясности начерчено отдѣльно сѣченіе $m_1 m_2$ съ дѣйствующимъ на него, усиліемъ R_3 . Направленіе равнодѣйствующаго усилія R_3 вообще наклонно къ сѣченію $m_1 m_2$; пусть уголъ составляемый силой R_3 съ нормалью къ сѣченію $m_2 m_1$ будетъ α_3 , тогда разложимъ равнод.

Фиг. 54



на двѣ составляющія:

$$N_2 C_1 = R_3 \cos \alpha_3$$

$$N_2 n_3 = R_3 \sin \alpha_3$$

изъ которыхъ

$$R_3 \cos \alpha_3 = N_3$$

дѣйствующая нор

мально къ сѣченію, будетъ производить продольныя измѣненія въ волокнахъ арки, и $R_3 \sin \alpha_3 = T_3$ - поперечныя. Но вліяніемъ сдвигающихъ или поперечныхъ силъ $|T|$ мы пренебрегли при опредѣленіи распора \mathcal{H} , ввиду ихъ незначительнаго вліянія, слѣдовательно и въ данномъ случаѣ остается принять во вниманіе только силу $\mathcal{N} = R \cos \alpha$. Поэтому, какъ видимъ, всякій разъ намъ придется равнодѣйств. силу R раскладывать на двѣ составляющія \mathcal{N} и T . Это построение удобнѣе дѣлать на многоугольникъ силъ |фиг. 53|, для чего изъ полюса O проводимъ $O C_0$ параллельно сѣченію m, m_2 и изъ конца d_2 соответственной силы R_3 опускаемъ перпендикуляръ на направленіе $O C_0$, тогда $C_0 d_2 = \mathcal{N}_3 = R_3 \cos \alpha_3$. Зная величину и точку приложенія нормальной силы \mathcal{N} , нетрудно далѣе опредѣлить величину изгибающаго момента M . Для рассматриваемаго сѣченія m, m_2 |фиг. 54| величина изгибающаго момента $M_3 = R_3 \cos \alpha_3 \cdot c c_1 = \mathcal{N}_3 \cdot c$. Повѣрка же прочности произвольнаго волокна въ разстояніи z отъ нейтральной оси площади сѣченія $|m, m_2|$ производится по известной формулѣ:

$$\frac{\mathcal{N}}{\omega} \pm \frac{M z}{J} < R_n$$

гдѣ: ω - площадь, а J - моментъ инерціи рассматриваемаго сѣченія, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_3$; $M = M_3 = \mathcal{N}_3 \cdot c c_1$; R_n - допускаемое прочное сопротивленіе. Величины \mathcal{N} и M мѣ-

няются съ измѣненіемъ положенія сѣченія, слѣдовательно, повѣрку необходимо произвести для сѣченія, гдѣ формула $\left(\frac{N}{\omega} \pm \frac{M \cdot z}{y} \right)$ даетъ максимальныя значенія. Рассматривая же кривую давленія и многоугольничъ силъ, мы видимъ, что равнодѣйств. R будутъ наибольшими у опоръ, слѣдовательно и составляющія ихъ N въ этомъ мѣстѣ также наибольшія, точка приложенія N совпадаетъ съ центромъ тяжести опорнаго сѣченія, слѣдовательно происходитъ равномерное сжатіе и повѣрка прочности поэтому производится по формулѣ $\frac{N}{\omega} < R_n$. По мѣрѣ же удаленія отъ опоръ, соответственныя равнодѣйствующія R будутъ уменьшаться, но зато онѣ болѣе или менѣе удаляются отъ оси, производя неравномерное сжатіе, т.е. давая добавочный изгибающій моментъ $M = N \cdot c$, причеъ наибольшее напряженіе можетъ превышать то, которое получается для опорнаго сѣченія. Сообразно съ этимъ, опредѣляя сѣченіе арки, обыкновенно сначала рассчитываютъ его у опоръ по формулѣ $\frac{N}{\omega}$ и затѣмъ повѣряютъ достаточность принятой площади ω для самаго невыгоднаго сѣченія, т.е. тамъ, гдѣ кривая давленія дальше всего отстоитъ отъ оси арки, иными словами, гдѣ наибольшій изгибающій моментъ M .

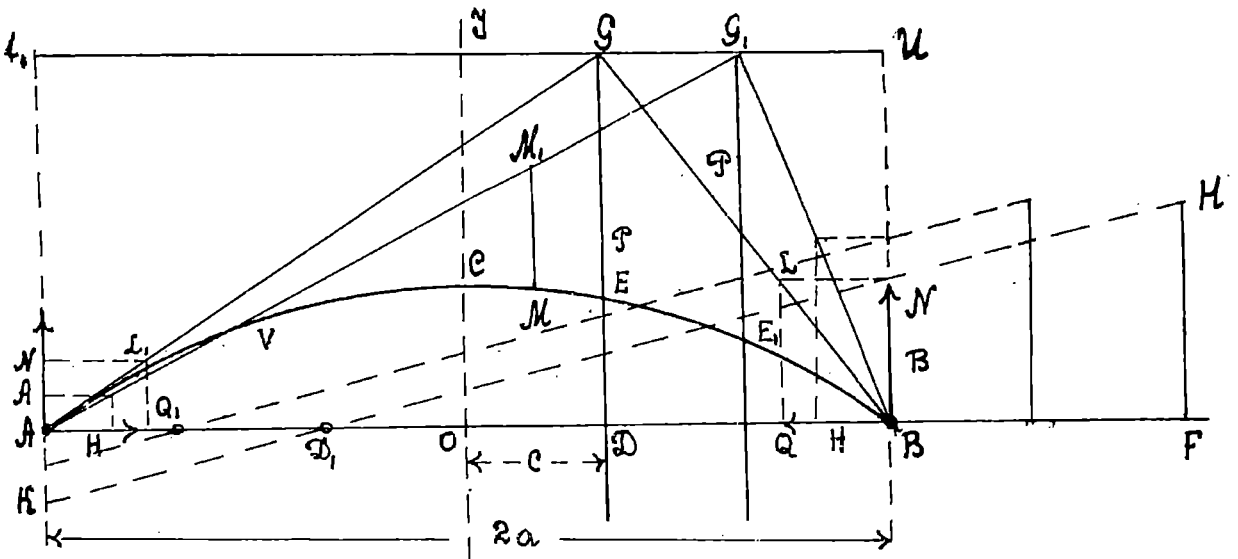
29 | КРИВАЯ ОПОРНЫХЪ ДАВЛЕНІЙ. Рассмотримъ арку ACB подѣ дѣйствіемъ сосредоточеннаго груза P , приложеннаго въ точкѣ E , въ разстояніи $CE = c$ отъ начала координатъ O |фиг. 55|.

Пусть AL_1 и BL направления реакций опоръ двух шарнирной арки; для равновѣсія системы извѣстно, что эти реакціи должны пересѣкаться съ грузомъ \mathcal{P} въ одной точкѣ \mathcal{G} . Если $AN_1 = A$ и $BN = B$ - вертикальныя составляющія реакцій опоръ, а AQ_1 и QB - горизонтальныя составляющія, то $A + B = \mathcal{P}$;

$$AQ_1 = QB = H \quad \text{и} \quad \frac{B}{A} = \frac{\partial A}{\partial B} = \frac{a+c}{a-c}$$

Величины вертикальн. реакцій легко построить графически пользуясь только что указанной пропорціональностью, а именно: отложимъ [фиг. 55] $OD_1 = OD = c$ и $D_1F = AB$; въ точкѣ \mathcal{E} возставимъ перпендикуляръ HE и

Фиг. 55.



примемъ $FK = \mathcal{P}$; прямая D_1H | соединяющая точки D_1 и H | отсѣчетъ на вертикаляхъ, проходящихъ через опоры, величины $AK = A$ и $BN = B$. Дѣя -

ствительно: $\triangle H D, F \in \triangle D, M B \in \triangle A D, K$. следовательно
но

$$\frac{BM}{AK} = \frac{D, B}{A D,} = \frac{a + e}{a - c} \quad \text{или} \quad \frac{B}{A} = \frac{a + c}{a - c}$$

$$\text{или} \quad B = \frac{P(a + c)}{2a} \quad \text{и} \quad A = \frac{P(a - c)}{2a}$$

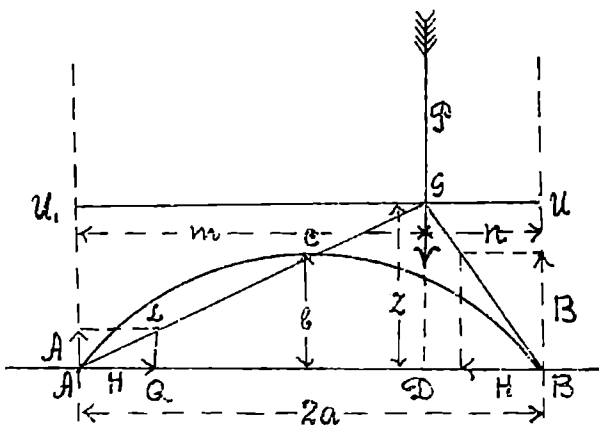
Зная величины вертикальныхъ реакцій $AK = AM_1 = A$ и $BM = B$ и опредѣливъ распоръ H , легко построить направление реакцій опоръ AL_1 и BL_1 на основаніи параллелограмъ силъ AM_1, L_1, Q_1 и BQ_1, M_1 , а следовательно и найти пересѣченіе ихъ съ силой P въ точкѣ G . Передвинемъ теперь грузъ P въ положеніе E_1 , тогда, на основаніи приведенныхъ соображеній, найдемъ новую точку G_1 , пересѣченія реакцій опоръ съ направлениемъ груза [фиг. 55]. Передвигая подобнымъ образомъ грузъ P по всему пролету арки и находя каждый разъ точку пересѣченія G - мы въ концѣ получимъ геометрическое мѣсто точекъ $|UGU_1|$ пересѣченія опорныхъ реакцій съ направлениемъ груза. Подобное геометрическое мѣсто точекъ, соединенное - плавной линіей, носитъ названіе линіи опорныхъ давленій. Свойство этой линіи таково, что при каждомъ положеніи груза P можно сейчасъ же опредѣлить величину и направленіе равнодѣйствующихъ

реакцій опоръ, а затѣмъ и ихъ составляющій A , B и H ; для этого нужно будетъ только точку пересѣченія G - груза P съ линіей опорныхъ давленій - соеди - нить съ центрами опоръ A и B и разложить силу P по направленію AG и GB ; полученныя же величины въ свою очередь разложить на вертикальныя и горизонталь - ныя составляющія, т.е. произвести обратное тому, что дѣлалось для нахождения точекъ линіи опорныхъ давле - ній. Пользованіе линіей опорныхъ давленій во многихъ случаяхъ значительно упрощаетъ и сокращаетъ рѣсчетъ, а потому ниже приведены аналитическіе выводы харак - тера и положенія этихъ линій для наиболее типичныхъ случаевъ двухшарнирныхъ арокъ въ примѣненіи ихъ къ гра - жданскимъ сооруженіямъ.

30 | ЛИНІИ ОПОРНЫХЪ ДАВЛЕНІЙ ПЛОСКИХЪ И ПОВЫШЕН - НЫХЪ ДВУХШАРНИРНЫХЪ АРОКЪ. Пусть на плоскую двухшар - нирную арку ACB |фиг. 56| дѣйствуетъ грузъ P , въ

Фиг. 56

разстояніи m и n отъ опоръ. Пролетъ арки $2a$, подѣлъ — b . Распоръ арки отъ сосредоточен - наго груза опредѣлится по уравненіямъ |60| и |59|



$$H = KH_1 \text{ гдѣ}$$

$$H_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{m \cdot n}{b \cdot a} P \text{ и}$$

$$\kappa = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{z^2}{\rho^2}}$$

обозначим $\frac{15}{8} \cdot \frac{z^2}{\rho^2} = \kappa_1$

Слѣдовательно $H = \kappa H_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{m \cdot n \cdot P}{\beta a (1 + \kappa_1)}$

Вертикальное сопротивление опоры $A = \frac{P n}{2a}$

Для исследования линии опорных давлений U_1, GU обозначим координаты ея точки G |пересѣченія съ гру-
зомъ P | черезъ m и z |фиг. 56|, тогда изъ подобія тре-
угольниковъ ALQ и AGD имѣемъ:

$$\frac{GD}{AD} = \frac{LQ}{AQ} \quad \text{или} \quad \frac{z}{m} = \frac{A}{H}, \quad \text{откуда}$$

$$z = \frac{m \cdot A}{H} \dots \dots \dots |69|$$

Подставляя значенія A и H , получаемъ:

$$z = \frac{\frac{m \cdot n \cdot P}{2a}}{\frac{3}{8} \cdot \frac{m \cdot n \cdot P}{\beta a (1 + \kappa_1)}} = \frac{4}{3} \beta (1 + \kappa_1) \quad |70|$$

Такъ какъ z не зависитъ отъ m , то линия опорныхъ давленій u, u будетъ прямою линіей, проведенной на высоту $\frac{4}{3} b (1 + K_1)$ подъ хордою дуги, причемъ, для очень малой величины

$$K_1 = \frac{15}{8} \cdot \frac{z^2}{b^2}, \quad \text{эту}$$

высоту можно принять приблизительно равною:

$$z = \frac{4}{3} b \quad \dots \quad |71|$$

Если бы арка была невыпуклая, то, обозначая, при произвольной абсциссѣ m ординату линіи опорныхъ давленій черезъ z [фиг. 48], получимъ, какъ и при плоскихъ аркахъ,

$$z = \frac{A}{H} m, \quad \text{гдѣ } H \text{ выражено въ}$$

функции угла при центрѣ, опредѣлится уравненіемъ [61] Подставляя значенія A и m , выраженные также въ угловыхъ функцияхъ, получимъ уравненіе линіи опорныхъ давленій. Эта линія представляетъ собою, слабо изогнутую, кривую, кривизна которой уменьшается съ возрастаніемъ угла α . Для полуциркульной арки получается уже прямая линія опорныхъ давленій.

Дѣйствительно, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ - распоръ арки отъ ее средоточеннаго груза P , выражается уравненіемъ [62]

$$H = \mathcal{P} \frac{1 + \cos 2\beta}{2\pi}$$

Изъ § 23 фиг. II, имѣемъ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$m = r (\sin \alpha - \sin \beta) = r (1 - \sin \beta)$$

$$A = \frac{\mathcal{P}(l - m)}{l} = \frac{\mathcal{P} \cdot r (\sin \alpha + \sin \beta)}{2 \cdot r \sin \alpha} = \frac{\mathcal{P} \cdot (1 + \sin \beta)}{2}$$

Слѣдовательно:
$$r = \frac{A}{H} m = \frac{\mathcal{P} \cdot r (1 + \sin \beta) (1 - \sin \beta) 2\pi}{\mathcal{P} \cdot 2 \cdot (1 + \cos 2\beta)}$$

но $(1 + \sin \beta) (1 - \sin \beta) = 1 - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta$

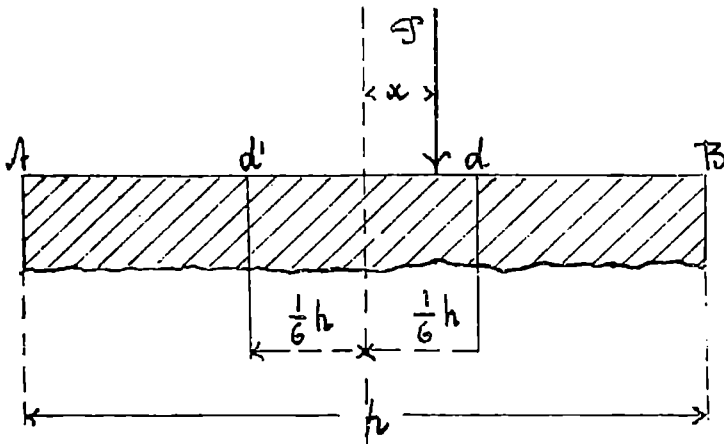
$1 + \cos 2\beta = \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \beta$ тогда

$$r = \frac{\mathcal{P} r \cdot 2\pi \cdot \cos^2 \beta}{\mathcal{P} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos^2 \beta} = \frac{\pi}{2} \cdot r = 1,571 \cdot r$$

Слѣдовательно при полуциркульной аркѣ линія опорныхъ давленій для сосредоточеннаго груза - прямая, отстоящая отъ хорды арки въ разстояніи $1,571r$.

31 | НЕВЫГОДНѢЙШЕЕ НАГРУЖЕНІЕ. Изъ теоріи неравно-

Фиг. 57.

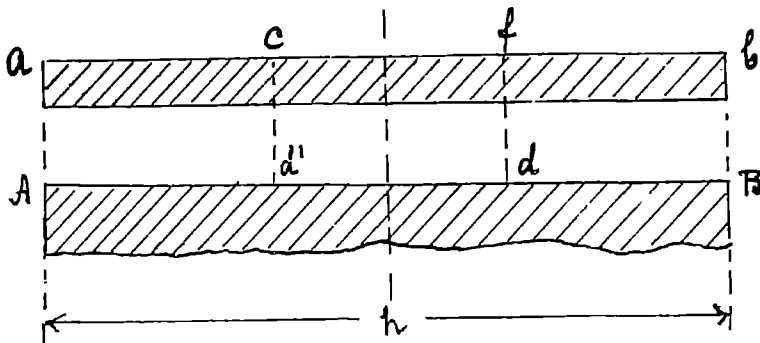


мѣрнаго сжатія короткихъ брусевъ известно, что, если AB |фиг.57| представляетъ проекцію сѣченія тѣла, подверженнаго сжимающему усилію отъ силы P , расположенной въ раз-

стояніи x отъ оси, то, по мѣрѣ возрастанія x , т.е. съ удаленіемъ силы P отъ оси, все больше увеличивается сжимающее усиліе въ крайнихъ волокнахъ B , но вмѣстѣ съ тѣмъ оно уменьшается въ волокнахъ A : поэтому удаленіе точки приложенія силы отъ центра сѣченія сопровождается убываніемъ сжимающаго напряженія въ противоположныхъ волокнахъ, которое, достигнувъ нуля, при дальнѣйшемъ передвиженіи P можетъ сдѣлаться отрицательнымъ, т.е. перейти въ вытягиваніе. Точки d и d' , въ которыхъ приложенная сила произведетъ въ крайнихъ волокнахъ напряженіе равное нулю, принадлежатъ крайнимъ точкамъ ядра сѣченія рабочей площади. Для прямо-

угольника, какъ известно, d и d' отстоятъ въ разстояніи $\frac{1}{6}h$ |высоты сѣченія| отъ центра тяжести, для другихъ сѣченій находеніе ядеръ сѣченія известно также изъ курса сопротивленія матеріаловъ. Если для каждаго сѣченія арки будемъ знать ядро сѣченія, а слѣдовательно и крайнія его точки d и d' , то, соединяя ихъ плавной кривой, по всему протяженію оси арки; получимъ двѣ крайнихъ линіи ядеръ: верхнюю и нижнюю, считая отъ срединной оси арки. Далѣе, если на сѣченіе AB , дѣйствуетъ нагрузка ab |фиг. 58|, то для того, чтобы по-

Фиг. 58.



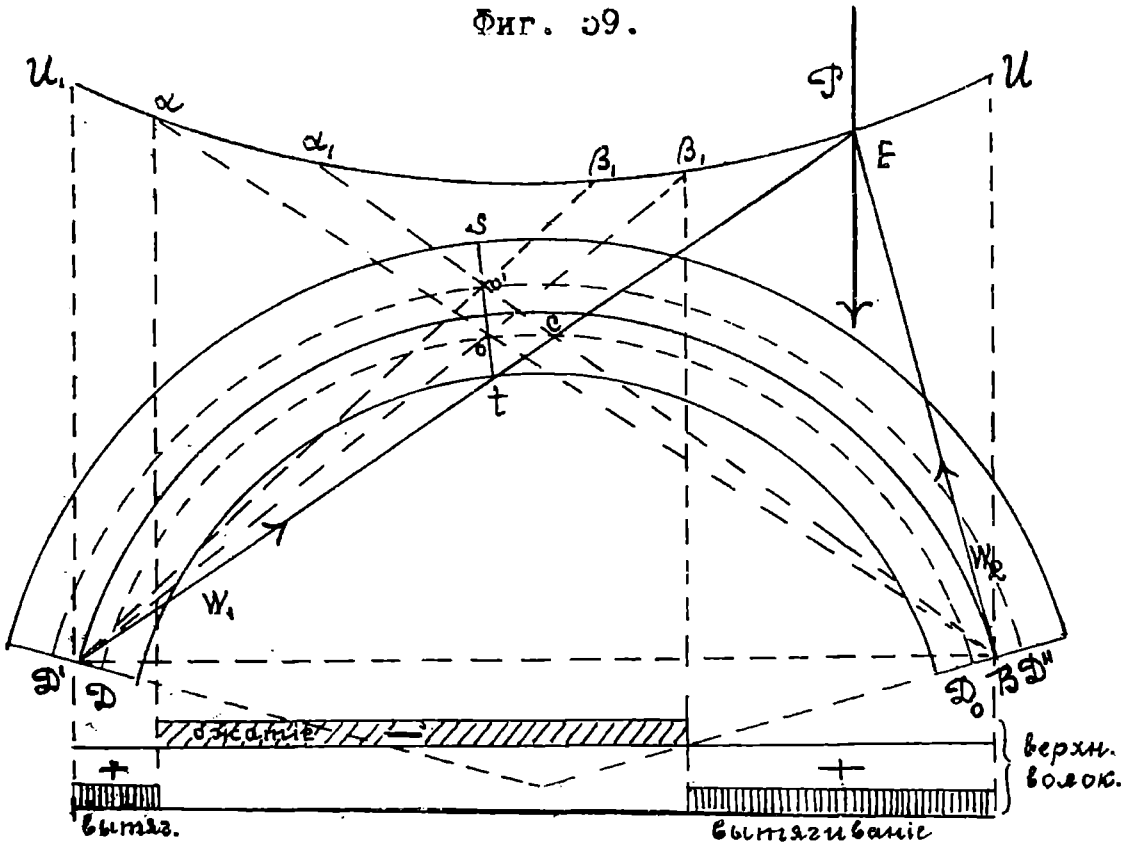
лучить самое наибольшее сжатіе въ крайнихъ волокнахъ B , надо слѣдовательно снять нагрузку $|ac|$, лежащую по лѣвую сторону крайней

точки ядра сѣченія d' , ибо послѣдняя, производя вытягиваніе противоположныхъ волоконъ B , будетъ уменьшать ихъ сжатіе, происходящее отъ нагрузки cb . Для самого же большаго сжатія лѣвыхъ волоконъ A надо снять нагрузку fb , оставляя af .

Примѣнимъ теперь только что сказанное, совместно съ линіей опорныхъ давленій, для отысканія невыгоднѣйшаго нагруженія двухшарнирныхъ арокъ въ отношеніи мак-

симальнаго сжатія или вытягиванія въ произвольномъ сѣченіи. Положимъ, что имѣемъ двухшарнирную арку, срединная ось которой ACB , линіи ядеръ — DD_0 и $D'D''$, и линія опорныхъ давленій U, U' |фиг. 59|. Возьмемъ произвольное сѣченіе арки st и проведемъ линіи Ad и Bd .

Фиг. 59.



соединяющія центры опоръ шарнировъ A и B съ крайней точкой ядра сѣченія d , до встрѣчи съ линіей опорныхъ давленій въ точкахъ β и α . Пусть подвижной грузъ P приложенъ въ точкѣ E , то реакціи опоръ W_1 и W_2 найдутся по величинѣ и направленію, если соединить точку E |пересѣченія силы P съ линіей опорныхъ давленій| съ центрами шарнировъ линіями Ae и EB и разложить

силу P на эти направленія. Тогда равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ лѣвой части арки относительно даннаго сѣченія st представляются реакціей опоры A т.е. W_1 ; она составляетъ съ прямой AB уголъ εAB , меньшій угла βAB . Поэтому точка пересѣченія равнодѣйствующихъ внѣшнихъ силъ лѣвой части арки съ сѣченіемъ st будетъ лежать ниже точки d ядра. Слѣдовательно верхнее волокно будетъ растянуто отъ дѣйствія каждаго груза, приложеннаго справа точки β . Точно также каждому грузу P , приложенному слѣва точки α , соответствуетъ равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ правой части арки, представляемая реакціей опоры B ; ея направленіе будетъ составлять съ AB уголъ, меньшій угла αBA , и потому пересѣченіе реакціи опоры B съ сѣченіемъ st дастъ точку, также ниже точки d ядра. Слѣдовательно, верхнее волокно сѣченія st будетъ растянуто дѣйствіемъ груза, приложеннаго слѣва точки α .

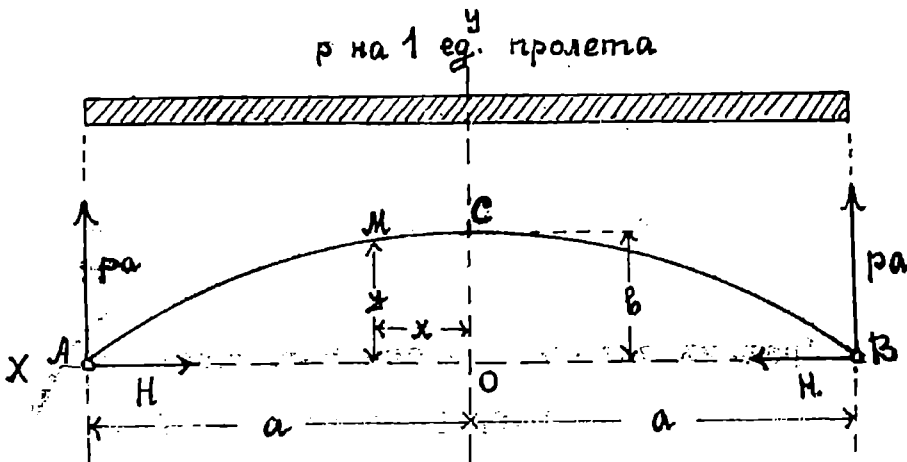
Когда же грузъ P приложенъ гдѣ нибудь между точками α и β , справа или слѣва сѣченія st , то равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ лѣвой или правой части арки, представляемая реакціей лѣвой или правой опоры, будетъ пересѣкать сѣченіе st выше точки d ядра, слѣдовательно, при этомъ верхнее волокно будетъ всегда сжато.

Такимъ образомъ загрузка средней части арки, между точками α и β будетъ уменьшать ея кривизну при де-

формации и будетъ вызывать наибольшее сжимающее напря-
женіе въ верхнемъ волокнѣ, а загрузеніе боковыхъ частей
|фиг. 60| арки будетъ увеличивать кривизну средней ча-
сти арки и потому будетъ вызывать наибольшее растяги-
вающее напряженіе верхняго волокна. Положеніямъ груза
въ точкахъ α и β соотвѣтствуетъ напряженіе верхняго
волокна, равное нулю. Подобнымъ же образомъ, проведя ли-
ніи $A\beta$, и $B\alpha$ черезъ точку d ядра, докажемъ, что поло-
женію груза между точками α и β соотвѣтствуетъ рас-
тяженіе нижняго волокна, а нагрузкѣ боковыхъ частей слѣ-
ва точки α , или справа точки β соотвѣтствуетъ сжа-
тіе этого волокна. Когда одна изъ точекъ α или β полу-
чается внѣ пролета арки, то арка въ отношеніи нагрузки
раздѣляется на двѣ части: одной соотвѣтствуетъ сжима-
ющее напряженіе, а другой - растягивающее.

32 | СРАВНЕНІЕ ПЛОСКИХЪ ДВУХШАРНИРНЫХЪ АРОКЪ СЪ ВАЛ-
КАМИ. Возьмемъ плоскую арку съ параболической осью или
съ осью, близкой къ параболѣ, и равномерно нагруженной

Фиг. 60.



по горизонтальной ея проекціи p нилогр. или пудовъ на I ед. длины пролета. Тогда, согласно уравненію |47| и § 20 равнодѣйствующій моментъ въ какой либо точкѣ M |фиг. 60|, определенной координатами x и y , равенъ:

$$M = M_1 - Hy, \text{ причеъ}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= pa(a-x) - \frac{p(a-x)^2}{2} = \frac{p}{2}(a^2 - x^2) = \\ &= \frac{pa^2}{2b} y, \quad H = k \cdot H_1 = k \frac{pa^2}{2b} \end{aligned}$$

|смотри урав. 56|. Подставляя значеніе M и H въ уравненіе для момента M получаемъ:

$$M = \frac{pa^2}{2b} y - k \frac{pa^2}{2b} y = (1-k) \frac{pa^2}{2b} y. \quad |73|$$

Этотъ моментъ, слѣдовательно, пропорціоналенъ ординатѣ y разсматриваемой точки M : онъ равенъ нулю въ пятахъ, и максимумъ по отношенію вершины арки C , гдѣ величина его равна:

$$M_2 = (1-k) \frac{pa^2}{2} \dots \dots \dots |74|$$

Въ прямой балкѣ со свободными концами наибольшій изгибающій моментъ въ срединѣ балки и равенъ $M_3 = \frac{pa^2}{2}$ [отнесенный къ полупролету].

Такимъ образомъ изгибающій моментъ M_2 въ аркахъ будетъ больше или меньше, чѣмъ таковой же M_3 для прямыхъ балокъ, въ зависимости отъ значенія $[1 - K]$. За исключеніемъ очень пологихъ арокъ, для которыхъ отношеніе $\frac{z^2}{a^2}$ вообще очень велико, т.е. которыя имѣютъ большую высоту поперечнаго сѣченія по сравненію съ пролетомъ, обыкновенно K превышаетъ $\frac{3}{4} = 0,75$. Въ большинствѣ же случаевъ K даже больше 0,90, такъ что $[1 - K]$ меньше 0,10 и, слѣдовательно, изгибающій моментъ M_2 значительно меньше M_3 - изгибающаго момента прямой балки того же пролета. Для арокъ средней пологости, у которыхъ отношеніе стрѣлы подъема къ пролету равно $\frac{1}{7}$ или $\frac{1}{8}$, значеніе $\frac{z^2}{a^2}$ имѣетъ свою обыкновенную величину отъ 0,0005 и до 0,001; въ этомъ случаѣ K отличается отъ единицы на 0,02 или на 0,03, слѣдовательно, наибольшій изгибающій моментъ M_2 имѣетъ величину

$$0,02 \frac{pa^2}{2} \quad \text{или} \quad 0,03 \frac{pa^2}{2},$$

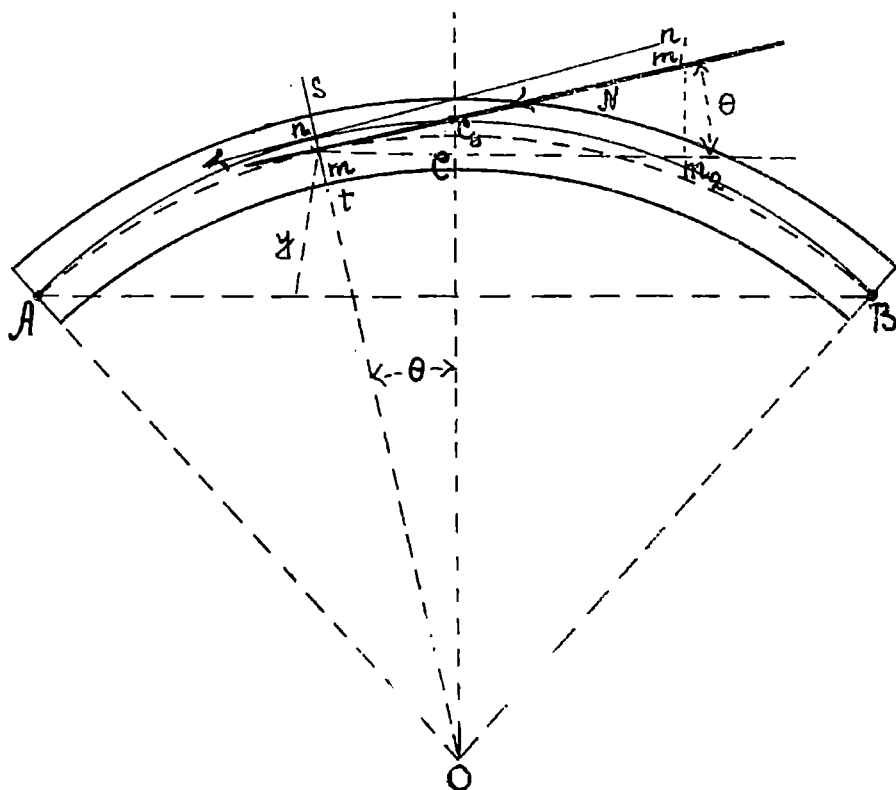
т.е. не болѣе въ среднемъ одной сороковой M_3 .

Что же касается зависимости, могущей существовать между поперечными сѣченіями въ аркахъ и балкѣ, то тако -

вая не можетъ быть сведена къ подобному отношенію, какъ для изгибающихъ моментовъ: матеріалъ арки долженъ сопротивляться, кромѣ дѣйствія изгибающаго момента, еще дѣйствию продольнаго сжатія, котораго не существуетъ въ прямыхъ балкахъ. Дѣйствіе продольнаго сжатія обратно дѣйствующему моменту: минимумъ въ вершинѣ арки, гдѣ оно имѣетъ величину распора $K \frac{pa^2}{2l}$ и максимумъ въ опорахъ.

Чтобы получить величину продольнаго сжатія въ произвольномъ сѣченіи st , необходимо, какъ извѣстно, |фиг. 6I| построить кривую давленія AcB для даннаго случая, тогда точка $|n|$ - пересѣченія st съ кривой давленія - будетъ точкой приложенія искомой равнодѣйствующей

Фиг. 6I.



продольнаго сжатія для сѣченія st , направленіе ея совпадаетъ съ касательной nn , къ кривой давленія AeB въ точкѣ n ; величина же ея опредѣлится изъ многоугольника силъ, служащаго для построенія кривой давленія |см. § 28|. Кривую давленія легко построить. Тогда, какъ извѣстно, вертикальное разстояніе этой кривой отъ срединной оси арки, умноженное на величину распора $\frac{kra^2}{2b}$ даетъ величину изгибающаго момента $(1-k) \frac{pa^2}{2b} y$ для точки m съ координатой y |см. § 28|. Слѣдовательно вертикальное разстояніе равно:

$$\frac{(1-k) pa^2 y \cdot 2b}{2b \cdot kra^2} = \frac{(1-k)}{k} y$$

оно пропорціонально ординатамъ срединной оси арки и отношенію $\frac{(1-k)}{k}$ - которое, какъ мы только что нашли, очень мало. Кривая давленія въ плоскихъ аркахъ такимъ образомъ очень мало отстоитъ отъ срединной оси и для приближенныхъ практическихъ подсчетовъ можно допустить, что эти двѣ кривыя совпадаютъ. Въ этомъ случаѣ равнодѣйствующая продольнаго сжатія для любой точки m - сѣченія st опредѣлится легко, если, проведя касательную mm , въ этой точкѣ, взять на ней величину mm_1 , проекція которой mm_2 на горизонтальную ось равна распору $k \frac{pa^2}{2b}$. Пусть уголъ, составляемый касательной mm_1 , съ горизонтальной осью или по-

перечнымъ сѣченіемъ st съ вертикалью будетъ уголъ Θ .
тогда $mm_2 = mm_1 \cos \Theta$ или $H = N \cos \Theta$

откуда
$$N = \frac{H}{\cos \Theta} = \kappa \frac{pa^2}{2b \cos \Theta}$$

У опоръ уголъ Θ наибольшій, также какъ и N . Для параболической арки въ этихъ точкахъ $\operatorname{tg} \Theta = \frac{2b}{a}$ или

$$\cos \Theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} \quad \text{, следовательно}$$

максимумъ
$$N = \kappa \frac{pa}{2b} \sqrt{a^2 + 4b^2} \quad \dots |75|$$

33 | ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОДЪ. Въ § 18 мы нашли ниже слѣдующую зависимость между распоромъ H и моментомъ M_1 [вертикальныхъ силъ, дѣйствующихъ на арку отъ точки M до одной изъ опоръ, включая и вертикальную составляющую этой опорной реакціи], выраженную уравненіемъ

$$\int_0^l \frac{N}{E\omega} \cdot \frac{dN}{dH} ds - \int_0^l \frac{M_1 y}{EJ} ds + \int_0^l \frac{Hy^2}{EJ} ds = 0 \quad \dots |15c|$$

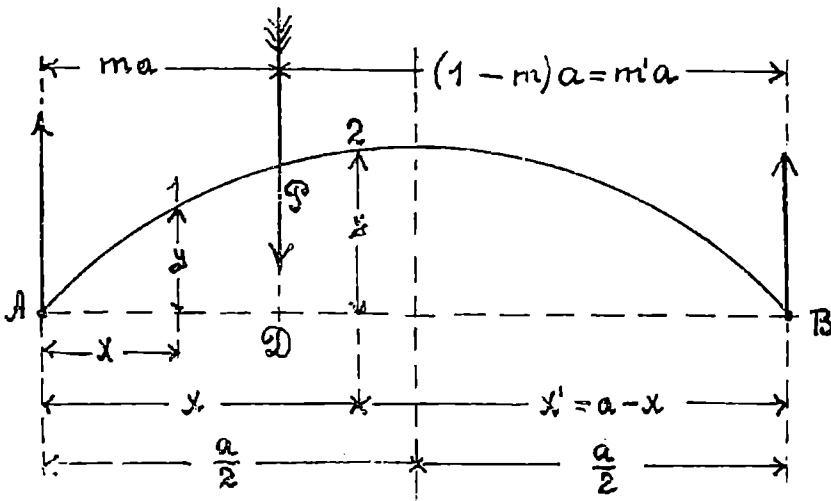
Пренебрегая вліяніемъ нормальной силы N по сравненію съ дѣйствіемъ изгибающаго момента, получимъ:

$$\int_0^L \frac{M_1 y ds}{E J} = \int_0^L \frac{R y^2 ds}{E J} \dots |76|$$

Приложимъ выведенное уравнение |76| къ опредѣленію распора R , произведеннаго сосредоточеннымъ вертикальнымъ грузомъ P [фиг. 62], расположеннымъ на аркѣ въ горизонтальномъ разстояніи $AD = ma$ и $DB = (1-m)a = m'a$, гдѣ a есть пролетъ арки AB . Тогда вертикаль-

Фиг. 62.

ныя реакціи рав-



$$A = \frac{P m'a}{a} = m'P$$

и $B = mP$ и интеграль уравненія |76|, а именно

$$\int_0^L \frac{M_1 y ds}{E J}$$

можетъ быть раз-

сматриваемъ, какъ сумма двухъ другихъ интеграловъ: первый отъ опоры A до силы P , т.е. въ предѣлахъ отъ 0 до m ; второй отъ силы P до другой опоры B , т.е. въ предѣлахъ отъ ma до L , гдѣ L - длина срединной оси арки. Такимъ образомъ получаемъ:

$$\int_0^L \frac{M_1 y ds}{E J} = \int_0^{ma} \frac{M_1 y ds}{E J} + \int_{ma}^L \frac{M_1 y ds}{E J} \dots |77|$$

Для первой части |отъ 0 до ma | моментъ M_1 для произвольной точки |I| съ координатами | $x - y$ | имѣетъ значеніе: $M_1 = Ax = m' \rho x$; для второй части |отъ ma до L | моментъ M_1 имѣетъ значеніе для произвольной точки |2|: $M_1 = m' \rho x - \rho(x - ma) = (1 - m) \rho x - \rho(x - ma) =$

$$= \rho x - m \rho x - \rho x + \rho ma \text{ или } M_1 = \rho m(a - x) = \rho m x'$$

гдѣ $x' = a - x$. Тогда уравненіе |77| приметъ видъ:

$$\int_0^L \frac{M_1 y \cdot ds}{\epsilon J} = \int_0^{ma} m' \rho x \cdot \frac{y ds}{\epsilon J} + \int_{ma}^L m \rho x' \cdot \frac{y ds}{\epsilon J},$$

а уравненіе |76|, вынося изъ подъ интеграла постоянныя величины, преобразуется въ уравненіе:

$$\rho \left\{ m' \int_0^{ma} x y \frac{ds}{\epsilon J} + m \int_{ma}^L x' y \frac{ds}{\epsilon J} \right\} = H \int_0^L \frac{y^2 ds}{\epsilon J} \quad \dots |78|$$

Пусть арна переменнаго сѣченія, тогда и J переменная величина. Если бы J было постоянно, то это можно было бы вынести изъ подъ знака интеграла. Цель графическаго метода, о которомъ идетъ рѣчь, заключается въ томъ, чтобы построить при помощи данныхъ задачи коэффициенты ρ и H , выравнивъ величины ихъ въ видѣ прямыхъ отрывковъ; тогда искомая величина распора H опредѣлится какъ четвертая пропорціональная. Для этого въ уравненіи 78 въ интегралахъ, т.е. въ суммахъ безконечно ма -

ныхъ величинъ подставляють суммы съ конечными величинами, которыя вычисляють, раздѣляя длину оси арки на отдѣльные элементы Δs |листъ I чер. I|, довольно малая для того, чтобы на протяженіи каждаго изъ нихъ |а именно: 0-1, 1-2, 2-3,| величины моментовъ инерціи поперечныхъ сѣченій можно было разсматривать какъ постоянныя. Тогда имѣемъ уравненіе:

$$P \left\{ m' \sum_0^{ma} xy \frac{\Delta s}{\xi \eta} + m \sum_{ma}^L x'y' \frac{\Delta s}{\xi \eta} \right\} = H \int_0^L y^2 \frac{ds}{\xi \eta} \dots |79|$$

Положимъ $\frac{\Delta s}{\xi \eta} = \Delta b$; Δb - будутъ величинами данными по длинѣ Δs и величинѣ момента инерціи η |средней величиной для каждаго изъ этихъ элементов|. Разсмотримъ

$\Delta b = \frac{\Delta s}{\xi \eta}$ какъ силы, направленныя горизонтально |чер. I| и приложенныя въ срединныхъ точкахъ каждаго элемента Δs . Центръ тяжести этихъ параллельныхъ силъ, который мы можемъ опредѣлить легко посредствомъ веревочнаго многоугольника, будетъ таковъ, что, если y_0 есть разстояніе его отъ оси x (AB) и b сумма всѣхъ элементовъ, то

$$b \cdot y_0 = \int_0^L y \Delta \dots |80|$$

Напримѣръ, если мы разбили арку на черт. I на пять эле-

ментовъ Δs (0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5), сре-
 дины которыхъ находятся въ точкахъ $\{1', 2', 3', 4', 5'\}$
 и проведемъ черезъ нихъ горизонтальныя линіи, рассмат-
 риваемыя какъ линіи дѣйствія силъ, то величины силъ Δb
 для каждаго изъ этихъ элементовъ опредѣлятся вычисле-
 ніемъ величинъ $\left(\frac{\Delta s}{\xi J}\right) = \Delta b$. Возьмемъ въ сторонѣ |чер-
 т. 3| горизонтальную прямую ab и отложимъ на ней въ по-
 слѣдовательномъ порядкѣ вычисленныя величины Δb каж-
 даго элемента $\{am, mn, np, \dots\}$, тогда $ab =$
 $= b = \sum_0^5 \Delta b$. Возставимъ теперь въ серединѣ ab перпенди-
 куляръ, и возьмемъ на немъ точку O въ разстояніи $ab = b$,
 если теперь соотвѣтственно многоугольнику силъ съ полю-
 сомъ O |черт. 3| построимъ на черт. 2 веревочный мно-
 гоугольникъ a, c, d, e, h, b , то на продолженіи крайнихъ
 сторонъ его $\{a, c, \text{ и } h, b\}$ получимъ точку g , лежащую на
 равнодѣйствующей параллельныхъ силъ Δb и отстоящую
 отъ оси AB въ разстояніи gJ , причемъ:

$$gJ = y_0 = \frac{\sum_0^5 y \Delta b}{b}$$

Для доказательства этого сначала замѣтимъ, что, если мы
 проведемъ двѣ какія нибудь стороны веревочнаго много-
 угольника, напримѣръ, c, d , и d, e , до пересѣченія съ го-
 ризонталью a, b , въ точкахъ m , и n , то $\Delta m, e, n$, со $\Delta m, o, n$,

тогда $\frac{m, n_1}{m, n} = \frac{y}{b}$ или $m, n_1 = m, n \cdot \frac{y}{b} = \frac{\Delta b \cdot y}{b}$

Слѣдовательно отрѣзки a, m_1, m_2, n, p, \dots по-
лучаемые пересѣченіемъ соответственныхъ сторонъ веро-
вочнаго многоугольника на горизонтали a, b , можно раз-
сматривать какъ силы, равныя каждая $\frac{y \Delta b}{b}$, а всю ве-
личину a, b , какъ сумму таковыхъ, т.е.

$$a, b = \frac{\sum_0^5 y \Delta b}{b}$$

Теперь, изъ подобія треугольниковъ aob и a, q, b , имѣемъ

$$\frac{a, b}{ab} = \frac{qJ}{b} \quad \text{или} \quad qJ = \frac{a, b}{ab} b \quad \text{но} \quad ab = b \quad \text{и} \quad a, b = \frac{\sum_0^5 y \Delta b}{b}$$

слѣдовательно

$$qJ = a, b = \frac{\sum_0^5 y \Delta b}{b} \quad \text{или} \quad qJ \cdot b = \sum_0^5 y \Delta b \quad , \quad \text{что и}$$

требовалось доказать.

Разсмотримъ теперь величины $\frac{y \Delta b}{b}$ какъ новыя
силы, приложенныя горизонтально по тому же направленію
дѣйствія, какъ и первыя силы Δb , по величинѣ же равныя
последовательно отрѣзкамъ $a, m_1, m_2, n, p, \dots, q, b$.
Сумма ихъ, какъ только что было доказано, равна $a, b = qJ$
примемъ точку q за полюсъ и соответственно новому мно-
гоугольнику силъ a, b, \dots, q, b , съ полюсомъ q по-
строимъ второй веревочный многоугольникъ | чер. 4 | a_2, c_2, d_2
 \dots, h_2, b_2 , тогда разстояніе q, T точки q - пе-

решенія крайнихъ сторонъ $a_2 c_2$ и $h_2 b_2$ второго веревочнаго многоугольника - отъ горизонтали AB будетъ имѣть выраженіе

$$g_1 T = \frac{\sum_0^5 y \cdot \frac{y \Delta b}{b}}{\sum_0^5 \frac{y \Delta b}{b}} = \frac{\sum_0^5 \frac{y^2 \Delta b}{b}}{\sum_0^5 \frac{y \Delta b}{b}} = \frac{\sum_0^5 y^2 \Delta b}{\sum_0^5 y \Delta b}$$

Обозначивъ черезъ y'_b ординату $g_1 T$ и предѣлы суммы - общимъ обозначеніемъ отъ 0 до α , получаемъ:

$$\sum_0^{\alpha} y^2 \Delta b = g_1 T \sum_0^{\alpha} y \Delta b = y'_b \sum_0^{\alpha} y \Delta b \quad \dots |31|$$

Принимая во вниманіе уравненія 80 и 81, выраженіе

$$\sum_0^{\alpha} y^2 \frac{\Delta S}{\varepsilon \gamma} \quad \text{въ уравненіи 80 приметъ}$$

видъ:

$$\sum_0^{\alpha} y^2 \frac{\Delta S}{\varepsilon \gamma} = \sum_0^{\alpha} y^2 \Delta b = y'_b \sum_0^{\alpha} y \Delta b = y'_b \cdot y'_b \cdot b \quad \dots |82|$$

Раздѣлимъ обѣ части равенства уравненія |79| на $b y'_b$, тогда получимъ:

$$P \left\{ m' \cdot \sum_0^{m a} \frac{x \cdot y \Delta b}{y'_b \cdot b} + m \cdot \sum_{m a}^{\alpha} \frac{x' y \Delta b}{y'_b \cdot b} \right\} = y'_b \quad \dots |83|$$

х | Дказательство подобному предыдущему основано на подобіи треугольниковъ.

Намъ остается теперь построить величину выраженія между скобками въ уравненіи 83. Для этой цѣли рассмотримъ количества $\frac{y \Delta b}{b}$, величины которыхъ выражаются отрезками a, m, n, p . q, b , какъ вертикальныя силы, приложенныя въ серединахъ дѣленій арки, т.е. въ точкахъ $1', 2', \dots, 5'$. Построимъ теперь веревочный многоугольникъ $a'cdeh'b'$ этихъ силъ |черт. I| посредствомъ многоугольника силъ a, q, b , |черт. 5|, который есть прежній |черт. 2|, но только повернутый на 90° . Сравненіе какихъ нибудь двухъ подобныхъ треугольниковъ, на примѣръ zsd и m, n, q |черт. I, 6 и 5| даетъ:

$$\frac{zs}{m, n} = \frac{a'd'}{qj} = \frac{x}{y_6}$$

гдѣ x - разстояніе точки $2'$ до лѣвой опоры, откуда слѣдуетъ:

$$zs = \frac{x}{y_6} m, n = \frac{x \frac{y \Delta b}{b}}{y_6 b} = \frac{x y \Delta b}{y_6 b} ; \text{ точно также дока-}$$

$$\text{жемъ, на примѣръ, что } s't = \frac{x' y \cdot \Delta b}{y_6 \cdot b} \quad | \text{ изъ подобія тре-}$$

угольниковъ $\Delta es't$ и q, n, p |, гдѣ x' разстояніе до правой опоры точки | $3'$ |. Такимъ образомъ стороны веревочнаго многоугольника, продолженныя до пересѣченія съ вертикалями опоръ, отсѣкаютъ на этихъ вертикаляхъ отрезки $zs, s't$ пропорціонныя величинамъ

$$\frac{x \cdot y \cdot \Delta b}{y_0 \cdot b} \quad \text{и} \quad \frac{x' \cdot y \cdot \Delta b}{y_0 \cdot b}$$

Сумма подобных отрезковъ, взятая напримѣръ, по верти-
калямъ между a' и s или между s' и b' дастъ искому сумму

$$\sum \frac{x \cdot y \cdot \Delta b}{y_0 \cdot b} \quad \text{и} \quad \sum \frac{x' \cdot y \cdot \Delta b}{y_0 \cdot b}$$

между взятыми границами, такъ - для протяженія $|2' - 3'$

$$- a's = \sum \frac{x \cdot y \cdot \Delta b}{y_0 \cdot b} \quad \text{и} \quad b's' = \sum \frac{x' \cdot y \cdot \Delta b}{y_0 \cdot b}$$

Отыщемъ теперь значеніе ординаты $K'K$ веревочнаго
многоугольника, соответствующей точкѣ приложенія силы
 \mathcal{F} ? Изъ чертежей I и 6 усматриваемъ, что $K'K = Sa' +$
 $+ (K'K - Sa')$; но изъ подобія соответственныхъ тре-
угольниковъ имѣемъ:

$$\frac{K'K - a's}{b's' - a's} = \frac{a'k'}{a'b'}. \quad \text{Но } a'k' = ma; \quad a'b' = a$$

Слѣдовательно,

$$K'K - a's = \frac{(b's' - a's)ma}{a} = m(b's' - a's) \quad ; \quad \text{тогда}$$

$$K'K = Sa' + (K'K - a's) = Sa' + m(b's' - a's) \quad \text{или}$$

$$K'K = Sa' - ma's + mb's' = mb's' + (1-m)Sa' \quad . \quad \text{Значенія:}$$

$$(1-m) = m'; \quad a's = \int_0^{ma} \frac{x \cdot y \cdot \Delta b}{y_0 \cdot b}; \quad b's' = \int_{ma}^L \frac{x' \cdot y \cdot \Delta b}{y_0 \cdot b}$$

слідовательно

$$K'K = m' \sum_0^{ma} \frac{x \cdot y \cdot \Delta b}{y_b \cdot b} + m \sum_{ma}^L \frac{x' \cdot y' \cdot \Delta b}{y_b' \cdot b} . \quad |84|$$

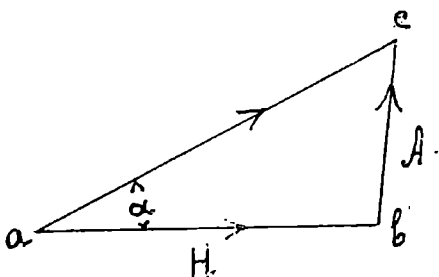
Итакъ ордината $K'K$ веревочнаго многоугольника измѣряетъ собою величину коэффициента силы \mathcal{P} въ уравненіи |83|. Обозначимъ значеніе этого коэффициента $K'K$ черезъ u_x , т.е. $K'K = u_x$, тогда уравненіе 83 приметъ видъ:

$$\mathcal{P} \cdot u_x = H y_b' \quad \text{или} \quad H = \frac{\mathcal{P} \cdot u_x}{y_b'} . . \quad |85|$$

Значеніе H можетъ быть опредѣлено какъ четвертая пропорціональная между отрѣзками: \mathcal{P} , u_x и y_b' или вычисленіемъ.

Зная величину распора H и вертикальннхъ составляющихъ опорныхъ сопротивленій $A = m' \mathcal{P}$ и $B = m \mathcal{P}$, теперь легко опредѣлить величину и направленіе опорныхъ реакцій, которыя есть ничто иное какъ равнодѣйствующія силы $|H$ и $A|$ и $|H$ и $B|$. Такъ, для лѣвой опоры имѣемъ величину и направленіе опорной реакціи $|ac|$ изъ

Фиг. 63.



треугольника силъ |фиг. 63| abc , гдѣ $cb = A = m' \mathcal{P}$ а -
 $- ab = H = \frac{\mathcal{P} u_x}{y_b'}$

Пусть α - уголъ составляемой на направленіемъ опорной реакціи съ

горизонталью, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A}{H} = \frac{m' \mathcal{P}}{\frac{\mathcal{P} \cdot u_x}{y'_c}} = \frac{m' y'_c}{u_x}$$

Слѣдовательно направление спорнаго сопротивления можно построить еще по $\operatorname{tg} \alpha$, если величину $|m' y'_c|$ удастся выразить графически помощью отрезка. Возьмемъ для этого на черт. 9, Листъ I величину горизонтальной линіи $a_0 b_0$ равной пролету арки и на вертикали $c_0 a_0$ отложимъ отрезокъ $c_0 a_0 = y'_c$; если соединить теперь точки c_0 и b_0 прямой и взять по вертикали груза \mathcal{P} отрезокъ n, m , заключенный между прямыми $a_0 b_0$ и $c_0 b_0$, то величина $n, m = m' y'_c$ (доказательство простое изъ подобія треугольниковъ $c_0 b_0 a_0$ и n, b_0, m). Имѣя теперь подъ аркой только что построенный веревочный многоугольникъ $a' c d b'$ или [на черт. 8] — $a' и b'$, ординаты котораго n, m или n, m' равны искомымъ коэффициентамъ u_x или u'_x , легко построить направление опорныхъ сопротивленій для любого сосредоточеннаго груза \mathcal{P}_1 или \mathcal{P}_2 [черт. 7], дѣйствующаго на арку. Такъ для груза \mathcal{P}_1 , проводя вертикаль до пересѣченія съ веревочнымъ многоугольникомъ и треугольникомъ $a_0 c_0 b_0$, имѣемъ: $u_x = n, m$; $m' y'_c = n, m$, слѣдовательно

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m' y'_c}{u_x} = \frac{n, m}{n, m} ; \quad \text{откладывая}$$

отъ точки A |черт. 7| величину $Ad = nm$ и, по перпендикуляру къ Ad , величину $dc = n_1 m_1$ и проводя прямую Ae , - получимъ направление лѣвой опорной реакціи, пересѣкающей направление дѣйствія силы P въ точкѣ M . Соединяя точку M съ правой опорой B , получимъ направление правой опорной реакціи. Точки M - принадлежатъ кривой опорныхъ давленій. Точно также можно найти и точку M_1 для груза P_2 причеъъ $Ad' = n' m'$, $e'd' = n_2 m_2$; точка M_1 принадлежитъ той же линіи опорныхъ давленій. Такимъ образомъ графически, по точкамъ M, M_1, \dots можно построить для различнаго случая загрузенія кривую опорныхъ давленій, и слѣдовательно и рѣшить вопросъ о невыгоднѣйшемъ нагруженіи арки |см. § 31|.

34| П р и м ъ р ъ: Данъ двухшарнирный деревянный кривой брусъ съ осью по дугѣ круга прямоугольнаго сѣченія, пролетомъ $a = 6$ сажень, подъемомъ въ стрѣлкѣ $b = 2$ сажени. На брусъ дѣйствуютъ сосредоточенные грузы $P_1 = 40$; $P_2 = 30$ пд. и $P_3 = 50$ пд. въ разстояніи отъ лѣвой опоры 1,25 сж., 2,75 сж и послѣдній отъ правой опоры въ разстояніи 1,5 сж. Брусъ долженъ быть постояннаго сѣченія. Опредѣлить распоръ и размѣры кривого бруса.

Такъ какъ брусъ однороднаго матеріала и постояннаго сѣченія, то величины E и J постоянныя; слѣдовательно, онѣ могутъ быть вынесены изъ подъ знака интеграла въ уравненіяхъ 78 или 79 и, по сокращеніи обѣихъ частей равенства, пропадутъ. Такимъ образомъ для даннаго при -

мбра имѣемъ, что $\Delta b = \Delta s$. Вычерчиваемъ въ принятомъ масштабѣ ось бруза [чер. 1] Листъ II и раздѣляемъ ее на 7 равныхъ частей: $|0 - 1|$, $|1 - 2|$, $|2 - 3|$. . . $|6 - 7|$, которыя и принимаемъ за силы $\Delta s = \Delta b$. Соответственно этимъ силамъ [чер. 2 и 3] выстраиваемъ многоугольникъ силъ [черт. 2] съ полюснымъ разстояніемъ, равнымъ $b = \sum_0^7 \Delta b$ и веревочный многоугольникъ a, c, d, f, b_1 [черт. 3], причемъ $am = mn = nr = \dots = ub = (0 - 1) = (1 - 2) = (2 - 3) = \dots = (6 - 7)$ и a, c_1 парал. aO ; $c, d_1 = mO$ и такъ далѣе. Величина g_1 [черт. 3], взятая по масштабу, опредѣлитъ значеніе y'_5 . Далѣе на черт. 3 продолжаемъ стороны веревочнаго многоугольника до пересѣченія съ горизонталью a, b_1 и отрѣзки $a, m, m, n, n, r, \dots, u, b_1$, отсѣкаемые соответственными сторонами, принимаемъ за силы, а точку g за полюсъ и строимъ второй веревочный многоугольникъ a_2, c_2, d_2, f_2, b_2 [черт. 4], причемъ $a_2, c_2 \parallel a, g$; $c_2, d_2 \parallel m, g$ и т.д. $u_2, b_2 \parallel g, b_1$. Величина T_{g_1} , взятая по масштабу, опредѣляетъ значеніе y'_5 , т.е.

$T_{g_1} = y'_5 = 1,60$ см. (точка g_1 есть пересѣченіе крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника: a_2, c_2 и u_2, b_2). Для окончательнаго рѣшенія вопроса о величинѣ распора [см. уравненіе 85] необходимо еще знать величины ординатъ u_x , для чего требуется построить третій веревочный многоугольникъ [чер. 6] a', c, d, \dots, u, b' по многоугольнику силъ g, a, m, \dots, b_1 [чер. 5], который есть ничто иное, какъ многоугольникъ силъ съ полюсомъ

г | черт. 3/, но только повернутый на уголъ 90° . Построивъ веревочный многоугольникъ силъ $a'cd$. . b' , причеъ $a'e \parallel ga$; $cd \parallel gm$, и т.д., и продолживъ вертикальное направление силъ до пересѣченія со сторонами этого многоугольника, получаемъ: $K_1 K^I = u'_x = 0,52 c$.;
 $K_2 K^{II} = u''_x = 0,82 c$.; $K_3 K^{III} = u'''_x = 0,60 c$.

Величина распора при дѣйствии одного сосредоточеннаго груза P опредѣляется уравненіемъ 85: $R = \frac{P u_x}{y'_6}$; общій же распоръ отъ нѣсколькихъ сосредоточенныхъ грузовъ опредѣлится, какъ сумма распоровъ отъ каждаго груза, т.е.

$$R_0 = \sum R = \frac{P_1 \cdot u'_x}{y'_6} + \frac{P_2 \cdot u''_x}{y'_6} + \frac{P_3 \cdot u'''_x}{y'_6}$$

или

$$R_0 = \frac{1}{y'_6} \left(P_1 \cdot u'_x + P_2 \cdot u''_x + P_3 \cdot u'''_x \right) \quad . |86|$$

Подставляя найденныя значенія въ уравненіи 86: $y'_6 = 1,6$;
 $u'_x = 0,52$; $u''_x = 0,82$; $u'''_x = 0,60$ и $P_1 = 40$;
 $P_2 = 30$; $P_3 = 50$, получаемъ:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{1,60} \cdot (40 \times 0,52 + 30 \times 0,82 + 50 \times 0,6) = \\ &= \frac{75,4}{1,6} = 47,1 \text{ пуд. } \approx 47 \text{ пд.} \end{aligned}$$

Для построения кривой давления, кроме величины распора H_0 , который, как известно, играет роль горизонтальных составляющих опорных сопротивлений, необходимо еще знать величины вертикальных составляющих A и

B . Последние, как известно, определяются для арки так же, как для бруса пролетом, равного пролету арки, и лежащего на двух опорах. Поэтому для величины вертикальной составляющей A левой опорной реакции получим, взяв сумму моментов всех активных и пассивных сил около правой опоры B ;

$$A = \frac{50 \times 1,5 + 30 \times 3,25 + 40 \times 4,75}{6} = 60,4 \text{ пд.}$$

Вертикальное сопротивление правой опоры $B = (50+30+40) + 60,4 = 59,6$ пд. Построим теперь на чер. 7 листе II многоугольник внешних сил $CBDEFC$, причем $CB = P_1$, $BD = P_2$, $DE = P_3$, $EF = P_4$ и $FC = R$, восстановим перпендикуляр GO и возьмем $OG = H_0$. Точку O_1 примем за полюс и соответственно лучам O_1G , O_1B , O_1D и O_1E многоугольника сил | чер. 7 | листе II построим на чер. 8 веревочный многоугольник AC, B, D, E который и будет кривой давления для данного случая загрузки.

Для определения площади сечения ω деревянного кривого бруса, начнем с опоры, положим с A , где сжатие, производимое продольной силой N , равномерное, поэтому можем пользоваться формулой: $\frac{N}{\omega} \leq R$, где R

прочное сопротивление сжатию - для дерева примем $R=24$ пуда на 1 кв. дм. Величина усилия N определяется или масштабу силъ на черт. 7, причем $O_1C = N$, или аналитически:

$$N = \sqrt{A^2 + H_0^2} = \sqrt{60,4^2 + 47^2} = 76,6 \text{ пуд.}$$

Тогда:

$$\frac{N}{\omega} = \frac{76,6}{\omega} \leq R = 24 \text{ пуд. или } \omega \geq \frac{76,6}{24} = 3,2 \text{ кв. дм.}$$

Примем высоту $h=6$ дм. и ширину $d=3$ дм. Тогда $\omega = h \cdot d = 18$ кв. дм. Проверим теперь, будетъ ли удовлетво- рять принятая площадь опорнаго сѣченія для самаго не- выгодно напряженнаго сѣченія бруса. Это сѣчение харак- теризуется согласно § 28 наибольшей величиной изгиба- ющаго момента M или наибольшимъ удаленіемъ кривой давлѣнія отъ оси бруса. Такимъ сѣченіемъ для рассматриваема- го случая является сѣченіе M_1 чер. 8 листъ II!. Оно опреде- лится, если провести на I^{омъ} участкѣ бруса касательную M_1M_2 параллельно сторонѣ AC , кривой давлѣнія: по- строивъ въ точкѣ M нормаль M_1M_3 , найдемъ разстояніе силы N отъ оси бруса, которое обозначали ранѣе [§ 28] черезъ c - т.е. $M_1M_3 = c$. Проверку прочности сѣченія въ M произведемъ по формуль:

$$\frac{N}{\omega} + \frac{M_2}{J} < R \text{ гдѣ } M = N \cdot c, \quad c = 10 \text{ дм.}, \quad N = 76,6 \text{ кгг.}$$

$$z = \frac{h}{2} = 3 \text{ дм.}; \quad \omega = 18 \text{ кв. дм.}; \quad J = \frac{dh^3}{12} = \frac{3 \cdot 6^3}{12}$$

Подставляя значенія въ выше приведенную формулу, получимъ:

$$\frac{76,6}{18} + \frac{76,6 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 12}{3 \cdot 6^3} = 4,5 + 42,5 \text{ пд.} > R = 24 \text{ пд.}$$

Слѣдовательно площадь сѣченія $\omega = 18$ кв. дм. недостаточна. Необходимо увеличить ее или за счетъ совместнаго увеличенія высоты и ширины, или только высоты. Оставимъ ширину d прежней, равной 3 дм., и обозначимъ высоту черезъ x .

Тогда: $\omega = x \cdot 3$; $r = \frac{x}{2}$; $J = \frac{3x^3}{12}$ и получимъ:

$$\frac{76,6}{3 \cdot x} + \frac{76,6 \cdot 10 \cdot x \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot x^3} = 24$$

Откуда $x = 9$ дм.

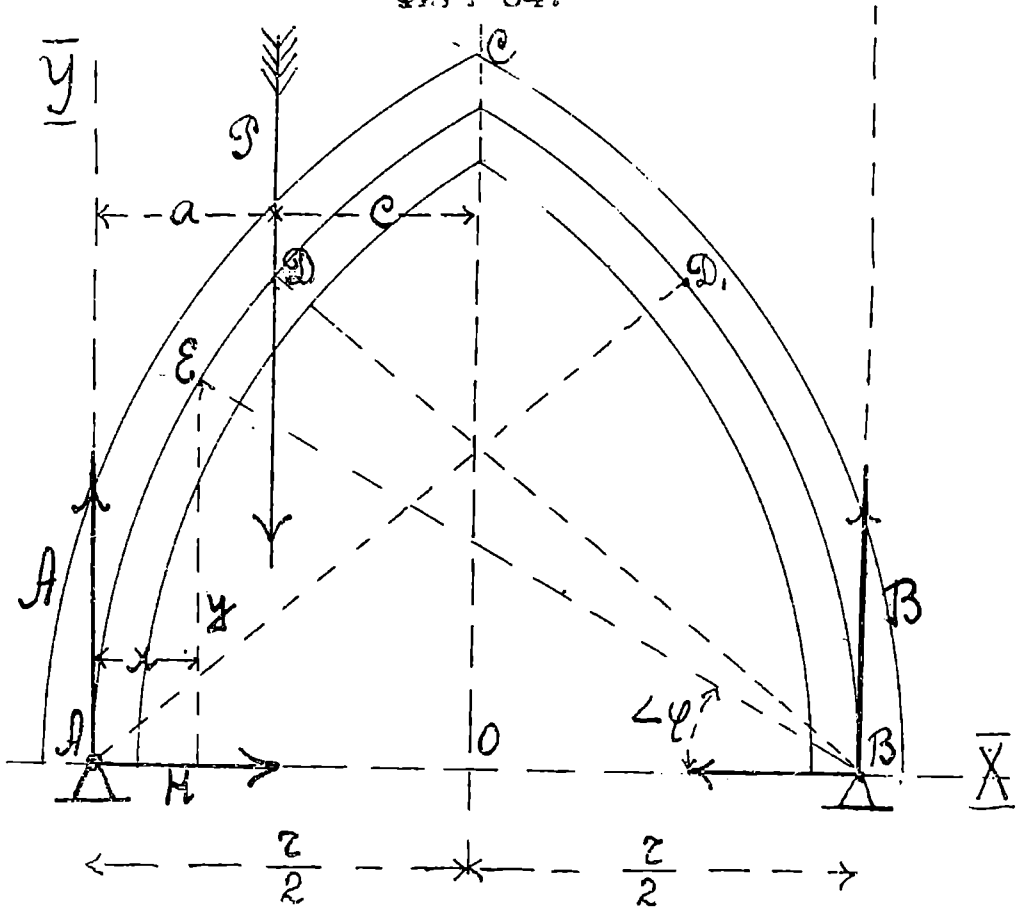
Слѣдовательно площадь $\omega = 9 \cdot 3 = 27$ кв. дм. будетъ достаточна на сопротивленіе сжатію.

35 | СТРЕЛЬЧАТЫЯ | ГОТИЧЕСКІЯ | АРКИ СЪ ШАРНИРАМИ ВЪ ПЯТАХЪ.

А | СОСРЕДОТОЧЕННАЯ НАГРУЗКА.

Разсмотримъ типъ стрѣлчатой арки, постояннаго сѣченія и у которой срединная ось составлена изъ двухъ дулъ AC и CB [фиг. 64], описанныхъ радиусемъ r , равнымъ пролету арки l , изъ центровъ, совпадающихъ съ центрами опорныхъ шарнировъ т.е. $BD = AD = AB = l = r$. Предположимъ, кромѣ того, что арки нагружены вертикаль-

Фиг. 64.

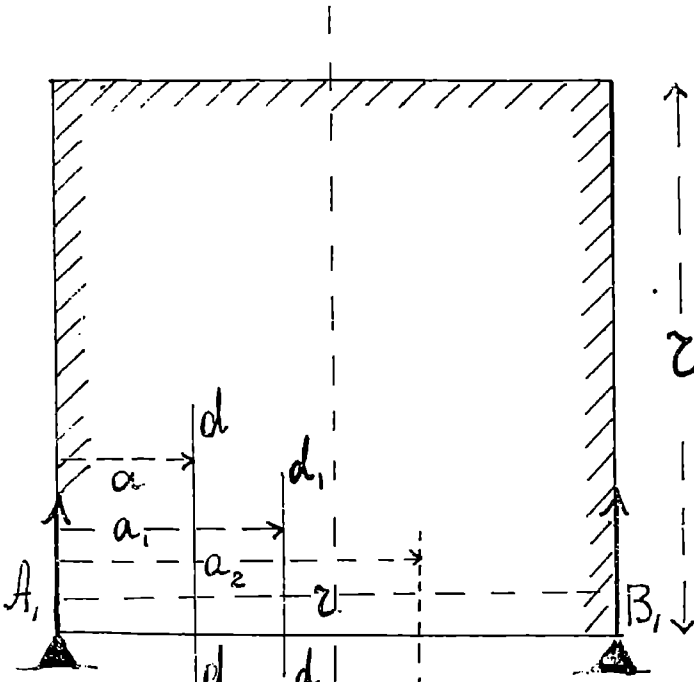


ными силами P , лежащими в плоскости оси арки.

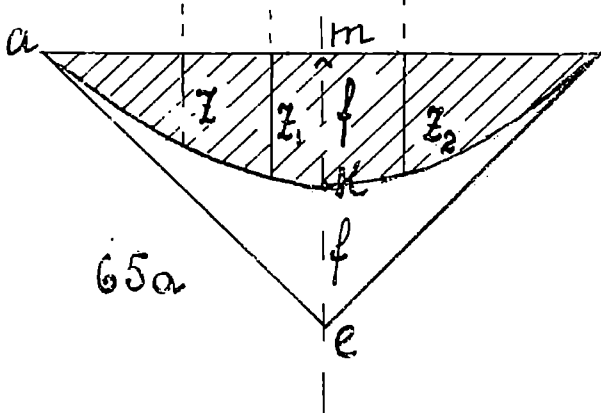
Определим, как и ранее, прежде всего величину распора H арки.

Ввиду того, что для стрельчатых арок можно еще с большими правдами, чем для повышенных арок [§ 29], пренебречь влиянием нормальной силы N по сравнению с действием изгибающего момента, то за исходное уравнение для работы деформации примем

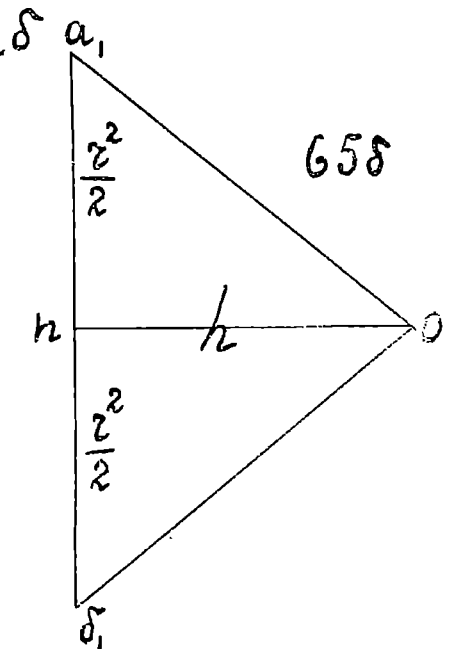
$$V = \int_0^z \frac{M^2 ds}{2 \cdot E J} \dots |16|$$



Фиг. 65



65a



65b

Примемъ за координатныя оси систему осей YAX [фиг. 64] начало координатъ которыхъ совпадаетъ съ центромъ шарнира A . При дѣйствии на арку сосредоточеннаго груза P , приложеннаго въ точкѣ D арки въ разстояніи a отъ лѣвой опоры или C отъ вертикальной оси OC изгибающій моментъ M относительно произвольно взятой точки E съ координатами x и y выразится какъ извѣстно изъ предыдущихъ параграфовъ, величиной

$$M = M_1 - Hy \quad \text{гдѣ}$$

$$M_1 = A \cdot x \quad \text{при } x < a \quad \text{и}$$

$$M_1 = A \cdot x - P(x - a) \quad \text{при } x > a$$

Подставляя значеніе M въ уравненіе работы деформаци и приравнивая первую производную отъ нея по статически неопредѣлимой силѣ H нулю, получимъ послѣ всѣхъ преобразованій, [см. § 21 и § 23], что

$$H = \frac{\int_0^l M_1 \cdot y \cdot ds}{\int_0^l y^2 ds} \quad \text{гдѣ} \quad \int_0^l y^2 ds$$

выражаетъ собой моментъ инерціи всей срединной линіи ACB арки, относительно ея хорды AB . Для рѣшенія этого интеграла удобнѣе ввести въ вычисленія угловыя функціи.

Обозначимъ черезъ φ уголъ $EB A$, тогда

$$y = r \cdot \sin \varphi; \quad ds = r \cdot d\varphi$$

$$\angle CBA = 60^\circ \quad (\Delta ACB \text{ , равносторонний}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{и } \mathcal{J}_s = \int_0^l y^2 ds = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} y^2 ds = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^3 \sin^2 \varphi d\varphi$$

Такъ какъ $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_s &= 2r^3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{d\varphi}{2} - \frac{1}{4} \cos 2\varphi d2\varphi \right) = \\ &= r^3 \left\{ \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right\}_0^{\frac{\pi}{3}} = r^3 \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right\} \end{aligned}$$

или $\mathcal{J}_s = r^3 \left\{ 1,047 - 0,433 \right\} = 0,614 r^3 \dots 187$

Опредѣлимъ теперь значеніе интеграла.

$$\int_0^l M_1 \cdot y ds$$

Подставивъ въ него значеніе M_1 и принявъ соответственныя предѣлы получимъ:

$$\begin{aligned} \int_0^z M_1 y ds &= \int_0^z Ax \cdot y ds + \int_0^z \{ Ax - P(x-a) \} y ds = \\ &= \int_0^z Ax \cdot y ds - \int_0^z P(x-a) y ds \end{aligned}$$

Разсматривая dx какъ проекцію дуги ds на ось AB , имѣемъ: $ds : dx = r : y$ или $r dx = y ds$.

Далѣе $A = \frac{P(r-a)}{r}$

Подставляя теперь значенія для A и $y ds$ въ послѣднее уравненіе, получимъ:

$$\int_0^z M_1 y ds = P(r-a) \int_0^z x dx - P r \int_a^z (x-a) dx$$

Но $\int_0^z x dx = \frac{z^2}{2}$; $\int_a^z (x-a) dx = \frac{(z-a)^2}{2}$, тогда

$$\int_0^z M_1 y ds = \frac{P(r-a)z^2}{2} - \frac{Pr(z-a)^2}{2} = \frac{1}{2} r a (z-a) P \dots 188$$

Прежде чѣмъ, подстановкой значеній для найденныхъ интеграловъ въ уравненіе для H опредѣлить его величину, остановимся подробнѣе на значеніи величины $\frac{1}{2}za(z-a)$ въ уравненіи |88|.

Представимъ себѣ балку, шириной, равной единицѣ и пролетомъ, равнымъ пролету арки z . Пусть балка равномерно нагружена по всему пролету сплошной нагрузкой высотой, равной z ; иначе говоря - грузовая площадь представляетъ собой квадратъ съ основаніемъ и высотой, равными z |фиг. 65|.

Сопротивленія опоръ подобной балки $A_1 = B_1 = \frac{z^2}{2}$.

Изгибающій моментъ балки относительно сѣченія $(d-d)$ въ разстояніи $|a|$ отъ лѣвой опоры, равенъ:

$$M_0 = A_1 a - \frac{za^2}{2} = \frac{z^2 a}{2} - \frac{z \cdot a^2}{2} = \frac{z \cdot a}{2} (z - a)$$

Такимъ образомъ предстоящій передъ \mathcal{F} коэффициентъ $\left\{ \frac{1}{2}za(z-a) \right\}$ въ уравненіи |88| по величинѣ равенъ изгибающему моменту $|M_0|$, дѣйствующему въ сѣченіи $|d-d|$, расположенномъ въ разстояніи a отъ лѣвой опоры балки, пролетомъ z и равномерно нагруженной сплошной нагрузкой высотой, равной z . Только что въ сказанное положеніе сейчасъ же даетъ способъ графо-аналитическаго нахожденія въ уравненіи 88 величины коэффициента передъ сосредоточеннымъ грузомъ \mathcal{F} дѣйствующимъ на стрѣльчатую арку.

Дѣйствительно, изъ курса сопротивленія матеріаловъ

известно, что, если построить для рассматриваемой балки кривую моментов, то означенная кривая будет параболой и произведение ординаты этой параболы $\frac{z}{2}$ на поперечное расстояние h [фиг. 65а и 65б] дадут величину соответствующих сечений балки моментов сил, лежащих слева или справа от сечения. Следовательно:

$$\frac{1}{2} \cdot z \cdot a(z-a) = z \cdot h$$

Точно также $\frac{1}{2} z \cdot a_1(z-a_1) = z \cdot h$ и т. д.

Если на кривой моментов $акб$ провести касательные $ае$ и $еб$ в крайних ее точках, то, как известно, из подобия треугольников $аме$ и $а_1но$ [фиг. 65а и 65б] можно написать, приняв $mk = ke = f$:

$$\frac{h}{\frac{z^2}{2}} = \frac{\frac{z}{2}}{2f} ; \text{ откуда } h = \frac{z^3}{8f}$$

Тогда уравнение 88 примет вид

$$\int_0^L M_y ds = \frac{1}{2} z a (z-a) \mathcal{P} = \\ = z \cdot h \cdot \mathcal{P} = \frac{z \cdot z^3}{8f} \cdot \mathcal{P} \dots \dots \dots |89|$$

Подставляя значения интегралов из уравнений 87, 88 и 89 в уравнение для определения величины \mathcal{H} , получим

$$\mathcal{H} = \frac{z \cdot a(z-a)}{2 \cdot 0,614 z^3} \mathcal{P} = 0,844 \left(1 - \frac{a}{z}\right) \cdot \frac{a}{z} \mathcal{P} \dots \dots \dots |90|$$

или

$$H = \frac{z \cdot h}{0,614z^3} \mathcal{P} = \frac{z \cdot z^3}{84 \cdot 0,614z^3} \mathcal{P} = 0,20358 \mathcal{P} \frac{z}{\ell}$$

или $H = 0,204 \mathcal{P} \frac{z}{\ell}$. . . |91|

Уравнение 91 употребляется при графо-аналитическом способъ расчета, уравнение же 90 - при аналитическомъ способъ, причемъ, для большаго удобства въ пользованіи, означенное уравнение можетъ быть преобразовано, а именно: обозначимъ отношеніе $\frac{a}{z}$ черезъ n , тогда уравненіе 90 приметъ видъ

$$H = 0,814 n(1-n) \mathcal{P} \quad . . . |92|$$

Можно составить таблицу значеній предстоящаго передъ \mathcal{P} коэффициента при различныхъ значеніяхъ n и тогда пользование уравненіями 90 и 92 представляется болѣе простымъ и удобнымъ, чѣмъ уравнен. 91.

Подобная таблица № 1, составленная нами для наиболѣе характерныхъ значеній n и приведена ниже.

Если на арку будетъ дѣйствовать рядъ сосредоточенныхъ грузовъ, напримѣръ m грузовъ, причемъ \mathcal{P}_1 - въ разстояніи a_1 , \mathcal{P}_2 - въ разстояніи a_2
 \mathcal{P}_m - въ разстояніи a_m , то распоръ для арки H опредѣлится, на основаніи выше приведенныхъ изслѣдова-

Т а б л и ц а № I

| $\frac{a}{z}=n$ | $1-n$ | $n(1-n)$ | $0,814n(1-n)$ | $\frac{a}{z}=n$ | $1-n$ | $n(1-n)$ | $0,814n(1-n)$ |
|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|-----------------|------------------|---------------|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0,204 | $\frac{4}{9}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{20}{81}$ | 0,201 |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | 0,181 | $\frac{5}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{20}{81}$ | 0,201 |
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | 0,181 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{10}$ | 0,09 | 0,073 |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | 0,153 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{7}{10}$ | 0,21 | 0,171 |
| $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | 0,153 | $\frac{7}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | 0,21 | 0,171 |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{4}{25}$ | 0,130 | $\frac{9}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 0,09 | 0,073 |
| $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{6}{25}$ | 0,195 | $\frac{1}{11}$ | $\frac{10}{11}$ | $\frac{10}{121}$ | 0,067 |
| $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{6}{25}$ | 0,195 | $\frac{2}{11}$ | $\frac{9}{11}$ | $\frac{18}{121}$ | 0,121 |
| $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{25}$ | 0,130 | $\frac{3}{11}$ | $\frac{8}{11}$ | $\frac{24}{121}$ | 0,161 |
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{36}$ | 0,113 | $\frac{4}{11}$ | $\frac{7}{11}$ | $\frac{28}{121}$ | 0,188 |
| $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{36}$ | 0,113 | $\frac{5}{11}$ | $\frac{6}{11}$ | $\frac{30}{121}$ | 0,202 |
| $\frac{1}{7}$ | $\frac{6}{7}$ | $\frac{6}{49}$ | 0,100 | $\frac{6}{11}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{30}{121}$ | 0,202 |
| $\frac{2}{7}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{10}{49}$ | 0,166 | $\frac{7}{11}$ | $\frac{4}{11}$ | $\frac{28}{121}$ | 0,188 |
| $\frac{3}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{12}{49}$ | 0,200 | $\frac{8}{11}$ | $\frac{3}{11}$ | $\frac{24}{121}$ | 0,161 |
| $\frac{5}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{10}{49}$ | 0,166 | $\frac{9}{11}$ | $\frac{2}{11}$ | $\frac{18}{121}$ | 0,121 |
| $\frac{6}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{6}{49}$ | 0,100 | $\frac{10}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{10}{121}$ | 0,067 |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{7}{64}$ | 0,089 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{11}{12}$ | $\frac{11}{144}$ | 0,062 |
| $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{15}{64}$ | 0,191 | $\frac{5}{12}$ | $\frac{7}{12}$ | $\frac{35}{144}$ | 0,200 |
| $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{15}{64}$ | 0,191 | $\frac{7}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{35}{144}$ | 0,200 |
| $\frac{7}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{7}{64}$ | 0,089 | $\frac{11}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{11}{144}$ | 0,062 |
| $\frac{1}{9}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{8}{81}$ | 0,080 | | | | |

ній, уравненіями:

$$H = \sum_{i=1}^{i=m} 0,814 n_i (1 - n_i) \mathcal{P}_i \dots \dots \dots |93$$

или

$$H = \sum_{i=1}^{i=m} 0,204 \mathcal{P}_i \frac{z_i}{f} =$$

$$= \frac{0,204}{f} \left[\mathcal{P}_1 z_1 + \mathcal{P}_2 z_2 + \dots + \mathcal{P}_m z_m \right] \dots |94|$$

Если грузъ \mathcal{P} будетъ приложенъ въ вершинѣ арки т.е.

$$n = \frac{a}{z} = \frac{1}{2}, \text{ то тогда изъ}$$

уравненій 90 и 91, равносильно, получаемъ:

$$H = 0,204 \mathcal{P} \dots \dots |95|$$

В | РАВНОМѢРНО-РАСПРЕДѢЛЕННАЯ НАГРУЗКА.

Если на арку дѣйствуетъ равномерно распределенная нагрузка p на единицу длины пролета, то пользуясь выше приведеннымъ методомъ изслѣдованія, легко вычислить значеніе числителя въ уравненіи

$$H = \frac{\int_0^l M_y ds}{\int_0^l y^2 ds}$$

такъ какъ величина знаменателя остается безъ измѣненія
Имѣемъ:

Сопротивленіе опоры $A = \frac{1}{2} p \cdot z$ и
 $M_1 = Ax - \frac{px^2}{2} = \frac{1}{2} pz x - \frac{px^2}{2}$ и

$$\int_0^z M_1 y ds = \int_0^z \frac{1}{2} p \cdot z^2 x dx - \int_0^z \frac{1}{2} pz x^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4} pz^4 - \frac{1}{6} pz^4 = \frac{1}{12} pz^4$$

Подставляя значеніе найденнаго интеграла и вмѣсто

$$\int_0^z y^2 ds \quad \text{прежнее зна-}$$

ченіе \int_0^z въ уравненіе для H получимъ:

$$H = \frac{pz^4}{12 \cdot 0,614 z^3} = \frac{z}{3} \cdot \frac{p \cdot z}{8 \cdot 0,614} = \frac{z}{3} \cdot 0,204 pz$$

или

$$H = 0,136 pz = 0,136 Q \quad \dots |96|$$

гдѣ $Q = pz =$ величинѣ всей равномерно распре-
дѣленной нагрузки.

Въ практикѣ церковнаго строительства приходится ча-сто имѣть дѣло съ загрузкой стрѣльчатыхъ арокъ равно-мѣрно распределенной нагрузкой |вѣсъ толпы людей, соб-ственный вѣсъ и т.п. | и грузомъ, приложеннымъ въ замкѣ арки. Въ этомъ случаѣ распоръ арки опредѣлится по фор-мулѣ.

$$H = 0,136 Q + 0,204 P \quad . . |97|$$

При пользованіи уравненіями 91 и 94 можно избѣжать построенія кривой моментовъ $ak\delta$ |фиг. 65а|, принявъ во вниманіе, что означенная кривая - парабола и слѣдо-вательно

$$\frac{z}{f} = \frac{4a(z-a)}{z^2} \quad . . . |98|$$

Примѣръ I. На стрѣльчатую арку, пролетомъ

$z = 2$ сж. дѣйствуютъ сосредоточенные грузы: $P_1 = 100$ пуд.

$P_2 = 200$ пуд. и $P_3 = 300$ пуд. - въ разстояніяхъ отъ лѣвой опоры: $a_1 = \frac{1}{2}$ сж; $a_2 = \frac{2}{3}$ сж; $a_3 = \frac{5}{3}$ сж.

Опредѣлить величину распора.

Пользуясь уравненіемъ 93 и данными таблицы, имѣемъ:

$$n_1 = \frac{a_1}{z} = \frac{1}{4} \quad \dots\dots\dots 0,814 n_1 (1 - n_1) = 0,153$$

$$n_2 = \frac{a_2}{z} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots\dots 0,814 n_2 (1 - n_2) = 0,181$$

$$n_3 = \frac{a_3}{z} = \frac{5}{6} \quad \dots\dots\dots 0,814 n_3 (1 - n_3) = 0,113$$

$$H = 0,153 \cdot 100 + 0,181 \cdot 200 + 0,113 \cdot 300 =$$

$$= 15,3 + 36,2 + 33,9 = 85,4 \text{ пуд.}$$

Пользуясь уравнениями 94 и 98, имѣемъ:

$$\frac{z_1}{f} = \frac{4a_1(z-a_1)}{z^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 1,5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{z_2}{f} = \frac{4a_2(z-a_2)}{z^2} = \frac{4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}}{4} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{z_3}{f} = \frac{4a_3(z-a_3)}{z^2} = \frac{4 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3}}{4} = \frac{5}{9}$$

$$H = 0,204 \cdot \frac{3}{4} \cdot 100 + 0,204 \cdot \frac{8}{9} \cdot 200 + 0,204 \cdot \frac{5}{9} \cdot 300 =$$

$$= 0,153 \cdot 100 + 0,181 \cdot 200 + 0,113 \cdot 300 = 85,4$$

С| ВЛІЯНІЕ ТЕМПЕРАТУРЫ.

Допустимъ, подобно тому, какъ это дѣлалъ для плоскихъ арокъ, что арка нагревается или охлаждается равномерно на t° , причемъ арка ненагружена. Обозначимъ иском. распоръ арки отъ температуры черезъ M_t . За исходное уравненіе примемъ уравненіе работы деформациі

$$V = \int_0^L \frac{M^2 ds}{2 \cdot 8 J}$$

Если теперь представить себѣ, что арка не была бы закрѣплена въ опорахъ шарнирами, а могла бы свободно расширяться, то пролетъ арки AB равный z при из-

измененіи температуры на t^0 увеличился или уменьшился бы на величину $\alpha t^0 z$, а сама арка приняла бы некоторую иную форму.

Если теперь къ концамъ арокъ приложить двѣ равныя и противоположныя силы H_t , то можно привести концы опоръ арокъ въ первоначальное положеніе и сама арка приметъ свою первоначальную форму.

Изгибающій моментъ относительно любой точки оси арки съ координатами x и y будетъ равенъ: $M = \pm H_t \cdot y$, гдѣ положительный знакъ будетъ соответствовать пониженію температуры, а отрицательный - повышенію температуры.

Если мы возьмемъ теперь первую производную отъ работы деформации V по статически неопредѣлимой величинѣ H_t то, какъ извѣстно, эта производная изобразитъ собой перемѣщеніе по направленію силы распора H_t т.е.

$$\frac{dV}{dH_t} = \frac{1}{EJ} \int_0^L M \cdot \frac{dM}{dH_t} ds = \alpha t^0 z \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{EJ} \int_0^L (\pm H_t \cdot y) (\pm y) ds = \alpha t^0 z \quad \text{откуда}$$

$$M_z = \frac{\varepsilon J \cdot \alpha t^2}{\int_0^L y^2 ds} \quad \text{но согласно ур. 87,}$$

$$J_3 = \int_0^L y^2 ds = 0,614 z^3 \quad \text{следовательно}$$

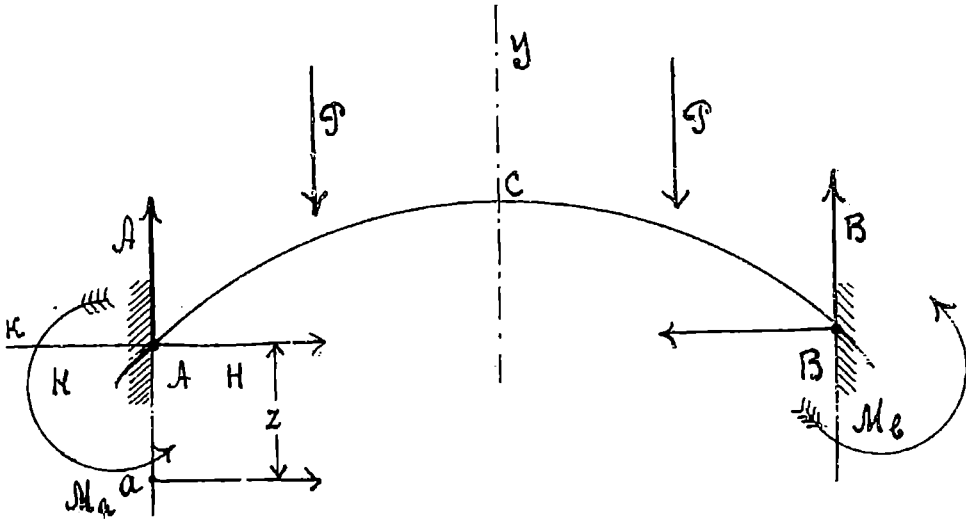
$$M_z = \frac{\varepsilon \cdot J \alpha t^2}{0,614 z^2} \quad \dots |99|$$

Г л а в а I V .

РАСЧЕТЪ АРОКЪ БЕЗЪ ШАРНИРОВЪ |СЪ ЗАДѢЛАННЫМИ ПЯТАМИ|.

36 | ОБЩІЯ УРАВНЕНІЯ ДЛІА АРОКЪ БЕЗЪ ШАРНИРОВЪ. Пусть арка, какъ и ранѣе, представляетъ собой призматическое тѣло, со средней осью, изогнутой по нѣкоторой кривой ACB |фиг. 66| и лежащей въ плоскости дѣйствія внѣшнихъ силъ ΣP . Въ этой же плоскости лежатъ и одна изъ главныхъ осей инерціи каждаго поперечнаго сѣченія арки. Концы арокъ A и B не имѣютъ шарнировъ, а неподвижно закрѣплены на опорахъ. Последнее обстоятельство, подоб-

Фиг. 66



но балкамъ съ закрѣпленными концами, вызываетъ дѣйствіе добавочнаго момента M_a на опорахъ - „момента задѣлки“. Въ аркахъ съ шарнирами въ опорахъ - опорныя реакціи проходятъ черезъ центръ шарнира, совпадающаго съ центромъ тяжести опорнаго сѣченія, въ аркахъ же съ закрѣпленными концами, благодаря отсутствію шарнировъ, опорныя реакціи не проходятъ уже черезъ центръ тяжести опорныхъ сѣченій, а въ некоторомъ разстояніи z отъ него, считая по вертикали вверхъ или внизъ, положимъ въ точкѣ a |фиг. 66| для лѣвой опоры. Въ этой точкѣ дѣйствіе лѣвой опорной реакціи, подобно предыдущему, разлагаемъ на двѣ составляющіе: вертикальное сопротивленіе A и горизонтальное H . Если въ центрѣ тяжести A опорнаго сѣченія приложить двѣ силы, по величинѣ и направленію равныя H , то тогда дѣйствіе опорнаго сопротивленія, приложеннаго въ точкѣ a , или его составляющихъ A и H въ этой же точкѣ, можно замѣнить, безъ на-

рушенія условій равновѣсія системи силъ, силами A и H , дѣйствующими въ центрѣ тяжести опорнаго сѣченія и моментомъ, равнымъ по абсолютной величинѣ $H \cdot z$; послѣдній и называется моментомъ задѣлки и обозначается $M_a = H \cdot z$. Такимъ образомъ въ аркахъ съ закрѣпленными концами каждая опора имѣетъ три неизвѣстныхъ величины: вертикальную и горизонтальную составляющія A и H , и моментъ $M_a = H \cdot z$; всего слѣдовательно для двухъ опоръ имѣемъ 6 неизвѣстныхъ. Уравненій же статики для плоской системы - три, недостаетъ поэтому трехъ уравненій и арка безъ шарнировъ является - втройнѣ - статически неопредѣлимой. Для составленія трехъ недостающихъ уравненій будемъ пользоваться принципомъ производной работы деформации. Для чего, какъ извѣстно, необходимо составить выраженіе для работы деформации въ функціи всѣхъ внѣшнихъ силъ, включая сюда и статически неопредѣлимныя величины A , H и M_a и, приравнявъ 0 перв. производныя работы деформации по статически неопредѣленнымъ силамъ, получимъ недостающія уравненія. Принявъ за исходное выраженіе для работы деформации уравненіе |15|

$$v = \int_0^l \frac{N^2 ds}{2 \cdot E \omega} + \int_0^l \frac{M^2 ds}{2 \cdot E J}$$

и, приравнявъ нулю производныя по A , H и M_a , имѣемъ:

$$\frac{dV}{dA} = \int_0^L \frac{N}{E\omega} \cdot \frac{dN}{dA} ds + \int_0^L \frac{M}{EJ} \cdot \frac{dM}{dA} ds = 0 \quad |100a|$$

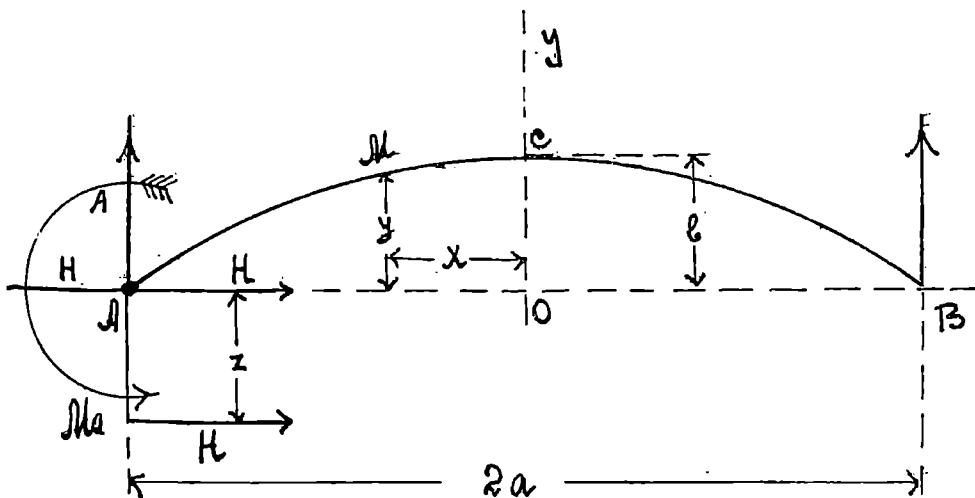
$$\frac{dV}{dH} = \int_0^L \frac{N}{E\omega} \cdot \frac{dN}{dH} ds + \int_0^L \frac{M}{EJ} \cdot \frac{dM}{dH} ds = 0 \quad |100b|$$

$$\frac{dV}{dM_a} = \int_0^L \frac{N}{E\omega} \cdot \frac{dN}{dM_a} ds + \int_0^L \frac{M}{EJ} \cdot \frac{dM}{dM_a} ds = 0 \quad |100c|$$

Эти уравнения и будутъ выражать собою добавочныя усло-
вия сопротивленія арки безъ шарнировъ.

37 | ПЛОСКІЯ ПАРАБОЛИЧЕСКІЯ АРКИ. Для плоской пара-

Фиг. 67.



болической
арки постоян-
наго попереч-
наго сѣченія
величины E ,
 ω и J , какъ
постоянныя,
могутъ быть
вынесены изъ
подъ знака
интеграла, кро-
мѣ того по -

добно тому, какъ это дѣлали для двухшарнирныхъ арокъ, можно допустить $ds = dx$ и $N = -H$. Арка симметрично нагружена. Обозначимъ величину изгибающаго момента около точки M съ координатами $|x$ и $y|$ (фиг. 67) черезъ M и выразимъ его, аналогично двухшарнирнымъ аркамъ, черезъ сумму моментовъ всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, дѣйствующихъ слева сѣченія M , тогда:

$$M = M_1 - M_a - Hy = M_1 - Hz - Hy = M_1 - H(z + y) \cdot |IOI|$$

гдѣ M_1 , какъ и ранѣе, имѣетъ тождественную величину съ моментомъ для прямого бруса, пролетомъ $2a$, относительно точки съ абсциссой x , т.е.

$$M_1 = A(a-x) - \sum P(p-x)$$

Принявъ во вниманіе сказанное, получаемъ:

$$\frac{dM}{dH} = -1; \quad \frac{dM}{dM_a} = 0; \quad \frac{dM}{dA} = 0;$$

$$\frac{dM}{dH} = -y; \quad \frac{dM}{dA} = a-x; \quad \frac{dM}{dM_a} = -1;$$

и уравненія $|IOOa|$, $|IOOb|$ и $|IOOc|$ преобразуются

$$\int_0^a M(a-x) dx = 0 \dots |101a|$$

$$+ \frac{H}{E\omega} \int_0^a dx - \frac{1}{EJ} \int_0^a M y dx = 0 \dots |101b|$$

$$\int_0^a M dx = 0 \dots |101c|$$

Подставимъ въ уравненіяхъ |101b| и |101c| вмѣсто M его значеніе изъ уравненія 101 и принимая $y = \omega z^2$, получаемъ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} \int_0^a M_1 y dx &= H \int_0^a dx + \\ + \frac{H}{z^2} \int_0^a y^2 dx &+ \frac{Hz}{z^2} \int_0^a y dx \dots |102| \end{aligned}$$

.....
 х| Ввиду допущенія, что $ds = dx$ предѣлы измѣнятся и, вмѣсто длины средней оси, надо взять за предѣлъ величину пролета, а такъ какъ арка симметрично нагружена, то

$$\int_0^a M_1 dx = H \cdot z \int_0^a dx + H \int_0^a y dx \quad \dots |103|$$

между y и x существует зависимость, выражаемая уравнением параболы:

$$y = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

Тогда

$$\int_0^a dx = a; \quad \int_0^a y dx = \int_0^a b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{2}{3} ab$$

$$\int_0^a y^2 dx = \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2 dx = \frac{8}{15} ab^2$$

Подставляя найденныя величины въ уравненія |102| и |103| имѣемъ

$$\frac{1}{a} \int_0^a M_1 y dx = H z^2 + \frac{8}{15} H \cdot b^2 + \frac{2}{3} H z b. \quad |104|$$

$$\frac{1}{a} \int_0^a M_1 dx = H z + \frac{2}{3} H b. \quad |105|$$

Исключая Z изъ уравненія |104| при помощи уравненія |105| получаемъ для опредѣленія величины распора M слѣдующее уравненіе:

$$\frac{1}{a} \int_0^a M_1 y dx - \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{a} \int_0^a M_1 dx = M \left(\frac{4}{45} b + z^2 \right) \dots |106|$$

откуда
$$M = \frac{3 \int_0^a M_1 y dx - 2b \int_0^a M_1 dx}{\frac{4}{15} ab^2 \left(1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2} \right)} \dots |107|$$

Обозначая, какъ и ранѣе, главную часть распора черезъ M_1 , и коэффициентъ поправки черезъ K_1 , получимъ

$$M = M_1 \cdot K_1 \dots |108|; \text{ гдѣ}$$

$$M_1 = \frac{3 \int_0^a M_1 y dx - 2b \int_0^a M_1 dx}{\frac{4}{15} ab^2} \dots |109|$$

$$K_1 = \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2}} \dots |110|$$

38 | ДѢЙСТВІЕ РАВНОМѢРНОЙ НАГРУЗКИ НА ВСЕМЪ ПРОЛЕТѢ ПЛОСКОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АРКИ. Пусть на единицу длины пролета арки дѣйствуетъ нагрузка p . Тогда, какъ извѣстно, имѣемъ:

$$M_1 = \frac{pa^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{pa^2}{2b} y \quad |см. § 20|.$$

$$\int_0^a M_1 y dx = \int_0^a \frac{pa^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{15} pa^3 b$$

$$\int_0^a M_1 dx = \int_0^a \frac{pa}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{pa^3}{3}$$

Величина главнаго распора, согласно уравненію |109|, приметъ значеніе:

$$H_1 = \frac{\frac{4}{5} pa^3 b - \frac{2}{3} pa^3 b}{\frac{4}{15} ab^2} = \frac{pa^2}{2b} \dots |111|$$

$$H = \kappa_1 \frac{pa^2}{2b} \dots |112|$$

Величина главного распора, следовательно, та же, что и при двухшарнирной арке, но коэффициент поправки K_1 меньше K |двухшарнирной арки|.

Плечо Z для определения опорного момента M_a может быть легко найдено из уравнения |105|, подставляя в него найденные выше значения, а именно:

$$Z = \frac{1}{aK} \int_0^a M_1 dx - \frac{2}{3} b = \frac{\rho a^3 \cdot 2b}{3a \rho a^2 \cdot K_1} = -\frac{2}{3} b = \frac{2}{3} b \left(\frac{1}{K_1} - 1 \right)$$

или

$$Z = \frac{2}{3} b \left[1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2} - 1 \right] =$$

$$= \frac{2}{3} b \cdot \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{z^2}{b} \dots \dots |113|$$

Моментъ задѣлки или опорный моментъ по абсолютной величинѣ будетъ равенъ:

$$M_a = H \cdot Z = K_1 \frac{\rho a^2}{2b} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{z^2}{b} = \frac{15}{4} K_1 \frac{\rho a^2 \cdot z^2}{b^2}$$

Подставляя значеніе K_1 изъ уравненія |110|, получимъ:

$$M_a = \frac{15}{4} \cdot \frac{\rho a^2 \cdot z^2}{b^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{\rho a^2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{15} \cdot \frac{b^2}{z^2}} \dots |III|$$

По знаку отрицательный, ибо действует против часовой стрелки.

Моментъ для любой точки съ координатами $|x$ и $y|$ выражается, какъ известно, по уравненію IOI

$$M = M_1 - M(z + y) \quad , \text{ гдѣ}$$

$$M_1 = \frac{\rho a^2}{2b} y \quad \text{и} \quad M = k_1 \frac{\rho a^2}{2b} \quad . \text{ Следовательно}$$

$$M = \frac{\rho a^2}{2b} y - k_1 \frac{\rho a^2}{2b} (z + y) = \frac{\rho a^2}{2b} \left[y(1 - k_1) - k_1 z \right] \quad x)$$

x|

$$\left[y(1 - k_1) - k_1 z \right] = y \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2}} \right) - \frac{\frac{15z^2}{2b}}{1 - \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2}} =$$

$$= y \frac{\frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2}}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2}} - \frac{\frac{15z^2}{2b}}{\frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2} \left(1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2} \right)} = y \frac{1}{1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2}} -$$

Зависия K_1 и Z нхъ величинами, получимъ:

$$M = \frac{pa^2}{2b} \cdot \left(y - \frac{2}{3}b\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2}} \quad \dots \quad [115]$$

Изъ уравненія [115] легко опредѣлить изгибающій моментъ въ любой точкѣ оси арки. Для опоръ, гдѣ $y = 0$, получимъ также найденное выраженіе опорнаго момента.

$$M_o = -\frac{pa^2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2}} \quad | \text{ см. ур. 114} |$$

Для вершины, гдѣ $y = b$, получимъ, обозначая изгибающій моментъ черезъ M_o .

$$M_o = \frac{pa^2}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2}} \quad \dots \quad [116]$$

т.е. по величинѣ моментъ M_o вдвое меньше M_a , а по знаку противоположенъ.

Если бы теперь пожелали опредѣлить то сѣченіе или точку на оси арки, относительно которой изгибающій мо-

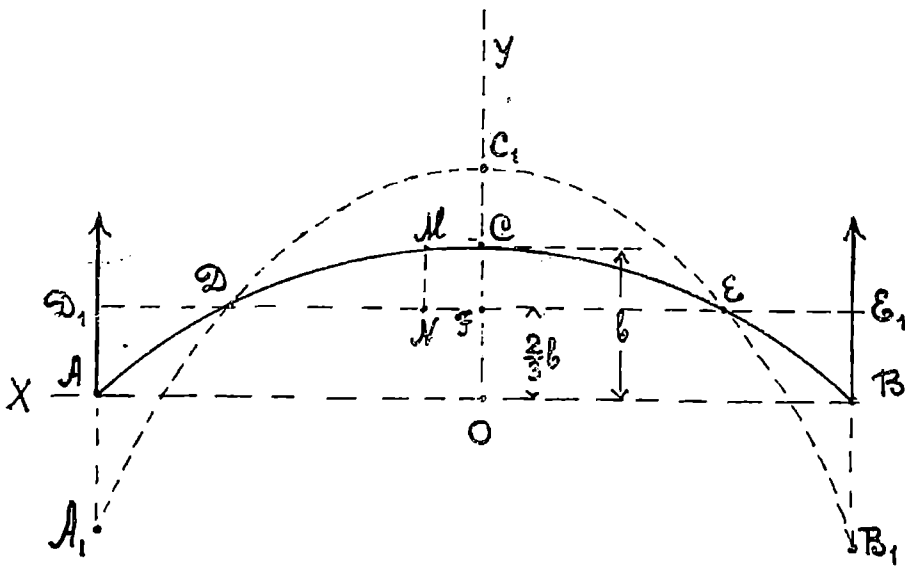
$$-\frac{2}{3}b \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2}} = \left(y - \frac{2}{3}b\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2}}$$

ментъ былъ бы равенъ нулю, то необходимо величину M , выражаемую уравненіемъ II5 приравнять нулю, тогда получимъ:

$$y = \frac{2}{3} b \quad \dots \quad |II7|$$

Проведемъ на |фиг. 68| линію DE параллельную оси X въ разстояніи $y = \frac{2}{3} b$, тогда, согласно уравненію II5, изгибающій моментъ въ любой точкѣ пропорціоналенъ величинѣ $|y - \frac{2}{3} b|$, т.е. ординатамъ MM' оси арки до прямой DE , слѣдовательно $AD_1 = E, B = 2CF$, такъ какъ моментъ у опоръ вдвое больше момента въ вершинѣ. Если бы пожелали построить кривую моментовъ, то она выразилась бы кривою A, C, B , причема въ точкахъ D и E она пересѣкала бы оси арки, ибо здѣсь дѣйствующіе

Фиг. 68.



моменты равны нулю.

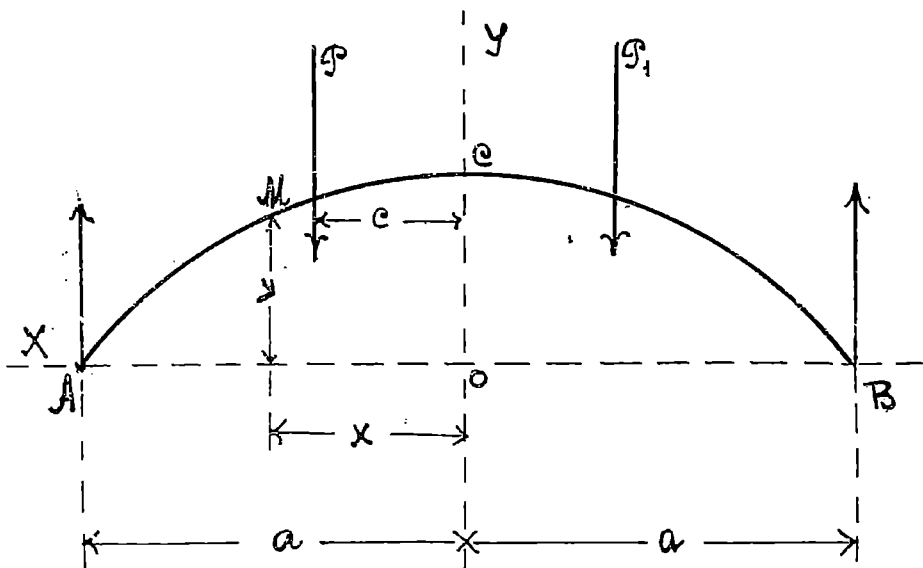
Полагая въ уравненіяхъ II6 и II4 $v = 0$, т.е. превращая арку въ балку закрѣпленную на опорахъ, получимъ:

$$M_a = \frac{pa^2}{3} \quad \text{и} \quad M_o = \frac{pa^2}{6}$$

извѣстныя уже величины для моментовъ закрѣпленныхъ балокъ изъ лекцій проф. Соколовскаго для III курса.

39 | ДѢЙСТВІЕ СОСРЕДОТОЧЕННАГО ГРУЗА ПЛОСКОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АРКИ. Пусть на параболическую арку ACB | фиг. 69 | дѣйствуетъ сосредоточенный грузъ P въ разстояніи c

Фиг. 69.



отъ начала координатъ O .

Вспользуемся ранѣ выведеннымъ уравненіемъ I09, опредѣляющимъ величину главнаго распора M_1 , для симмет-

рично нагруженных параболических арок. Для этой цели приложим справа груз \mathcal{P}_1 , равный \mathcal{P} , и симметрично расположенный относительно оси Y . Распоръ, отнесенный къ этимъ двумъ грузамъ, очевидно будетъ вдвое болѣе того, который относился бы къ одному изъ этихъ грузовъ, взятыхъ отдѣльно. Имѣемъ поэтому:

$$2H_1 = \frac{3 \int_0^a M_1 y \cdot dx - 2b \int_0^a M_1 dx}{\frac{4}{15} \cdot ab^2} \dots \dots 118.$$

Вмѣсто M_1 надо подставить его значеніе, равное $\mathcal{P} \cdot [a - x]$, если точка M взята между опорой и точкой приложенія силы, т.е. когда $x > c$, и $\mathcal{P} |a - c|$ — когда точка M взята между силой и вершиной или когда $x < c$. Тогда уравненіе 118 приметъ видъ:

$$2H_1 = \frac{3 \int_0^c \mathcal{P}(a-c) y dx + 3 \int_c^a \mathcal{P}(a-x) y dx}{\frac{4}{15} ab^2} + \frac{-2b \int_0^c \mathcal{P}(a+c) dx - 2b \int_c^a \mathcal{P}(a-x) dx}{\frac{4}{15} ab^2} \dots \dots 119$$

Производя интегрированіе, получимъ окончательное

выраженіе для распора:

$$H_1 = \mathcal{P} \cdot \frac{15}{32} \cdot \frac{a}{b} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right)^2 \quad \dots \quad |120$$

Это выраженіе аналогично тому, которое дано Дарсеи
емъ для арки съ шарнирами въ пятахъ. Полный распоръ

$$H = k_1 H_1$$

Если бы мы перенесли начало координатъ въ одну из
опоръ и разстояніе груза отъ опоръ обозначили бы черезъ
 m и n |фиг. 70|, а пролетъ арки черезъ l , то, за-
мѣняя въ формулѣ |120|: $a = \frac{l}{2}$; $c = m - \frac{l}{2}$, по-
лучимъ слѣдующее выраженіе для распора H_1 , отнесенна-
го къ новымъ координатамъ:

$$H_1 = \mathcal{P} \cdot \frac{15}{32} \cdot \frac{l}{2b} \cdot \left[1 - \left(\frac{m - \frac{l}{2}}{\frac{l}{2}} \right)^2 \right]^2$$

или

$$H_1 = \mathcal{P} \cdot \frac{15}{32} \cdot \frac{l}{2b} \cdot \frac{16 \cdot m^2 \cdot (l - m)^2}{l^4}$$

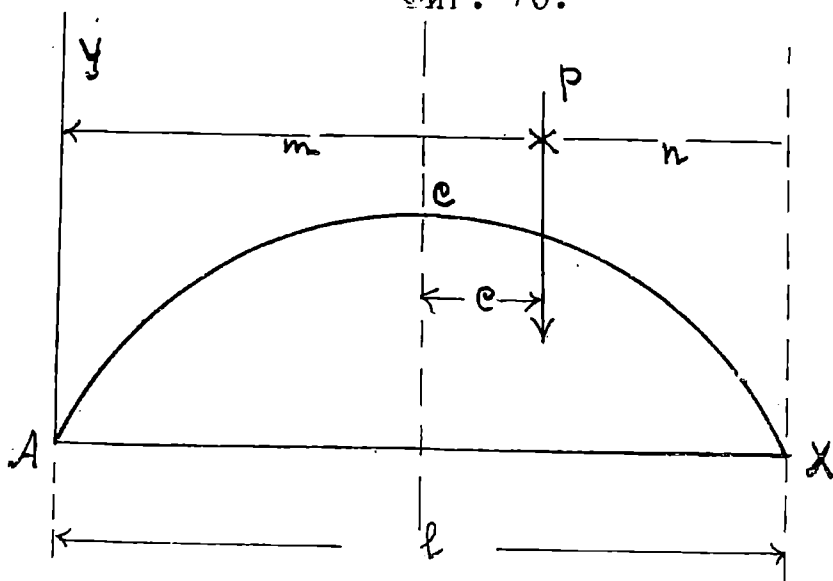
производя сокращенія и замѣняя $l - m = n$, получимъ:

$$H_1 = \frac{15}{4} \cdot \rho \cdot \frac{m^2 \cdot n^2}{l^3 \cdot b} \quad \dots \quad |121|$$

Величина полного распора:

$$H_0 = H_1 \cdot K_1 = \frac{15}{4} \cdot \rho \cdot \frac{m^2 \cdot n^2}{l^3 \cdot b \left(1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{l^2}\right)} \quad \dots \quad |122|$$

Фиг. 70.



Зная величину распора H_0 легко определить из уравнения 103 величину его плеча z , а следовательно и величину опорного момента

M_a . Величина вертикальной составляющей опорного сопротивления - A определится из уравнения 101а. Для рассматриваемого случая значение этих величин ниже следующее:

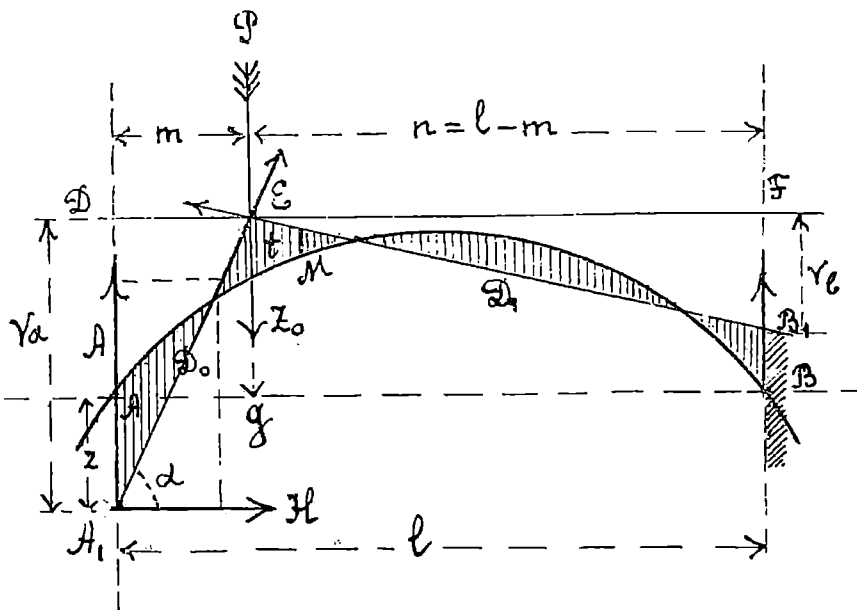
$$M_a = \rho \cdot \frac{m \cdot n^2}{l^3} \cdot \left(l - \frac{\frac{5}{2} m}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{l^2}} \right) \quad \dots \quad |123|$$

$$Z = \frac{Ma}{H} = \frac{4}{15} b \cdot \frac{l}{m} \cdot \left(1 - \frac{5}{2} \frac{m}{l} + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{l^2} \right) \quad |124|$$

$$A = P \cdot \frac{(l-m)^2 (l+2m)}{l^3} \quad \dots |125|$$

40 | КРИВАЯ ОПОРНЫХ ДАВЛЕНИЙ ДЛЯ ПЛОСКИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ АРОКЪ БЕЗЪ ШАРНИРОВЪ. Зная величину распора H и точки приложенія: A_1 и B_1 , опорныхъ реакцій, нетрудно найти и положенія опорныхъ реакцій D_0 и D_1 |фиг. 71| по величинѣ и направленію. Такъ, складывая для лѣвой опоры A , найденный распоръ H съ вертикальной проекціей

Фиг. 71.



A опорнаго сопротивленія |фиг 71|, найдемъ по величинѣ и направленію лѣвое опорное давленіе D_0 . Точка E , въ которой это давленіе D_0 пере-сѣчетъ направле-

ніе груза \mathcal{P} будетъ принадлежать, какъ извѣстно уже, кривой опорныхъ давленій; черезъ эту же точку должно проходить и давленіе \mathcal{D}_1 , правой опоры. Если точка \mathcal{E} имѣетъ абсциссу m , а ордината ея относительно хорды будетъ $z_0 = \mathcal{E}\mathcal{O}$, то получимъ, обозначая уголъ $\mathcal{E}A\mathcal{H}$ черезъ α , слѣдующее соотношеніе:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A}{H} = \frac{z_0 + z}{m} \quad \dots |126|$$

откуда, принимая во вниманіе уравненія 125 и 122 получаемъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{z_0 + z}{m} = \\ &= \frac{4}{15} \cdot \frac{\mathcal{P}(l-m)^2(l+2m)l^3b \cdot \left(1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2}\right)}{l^3 \cdot \mathcal{P} \cdot m^2 (l-m)^2} \end{aligned}$$

или, послѣ сокращеній,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{z_0 + z}{m} = \\ &= \frac{4}{15} \cdot \frac{b \cdot l}{m^2} \cdot \left(1 + 2 \frac{m}{l}\right) \left(1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2}\right). |127| \end{aligned}$$

Подставляя въ уравненіе 127 вместо z это значеніе изъ уравненія 124, имѣемъ:

$$z_0 = \frac{4}{15} \cdot \frac{b \cdot l}{m} \left(1 + 2 \frac{m}{l}\right) \left(1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{l^2}\right) -$$

$$- \frac{4}{15} \frac{b \cdot l}{m} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{m}{l} + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{l^2}\right) = \frac{6}{5} b \cdot \left(1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{l^2}\right) \quad |128|$$

Такъ какъ z_0 не зависитъ отъ m , то заключаемъ, что кривая опорныхъ давленій представляетъ собою прямую линію DF [фиг. 71]. Вообще рекомендуется опредѣлять положеніе точки A_1 относительно линіи опорныхъ давленій DF при помощи вертикальнаго разстоянія

$$DA_1 = V_a = z_0 + z = \frac{4}{15} \cdot \frac{b \cdot l}{m} \cdot \left(1 + 2 \frac{m}{l}\right) \left(1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{l^2}\right),$$

что можно преобразовать въ слѣдующее уравненіе:

$$V_a = \frac{8}{15} b \left(1 + \frac{l}{2m}\right) \left(1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{l^2}\right) \dots |129|$$

Соотвѣтствующее разстояніе V_b для правой опоры арки получается простой замѣной m черезъ $|l - m| = n$.

Влѣво и вправо отъ груза P , единственными внешними силами являются силы D_0 и D_1 . Ломаная линия A, E, B , есть въ данномъ случаѣ кривая давленія арки. Называя произвольное вертикальное расстояние между этой линіей и осью арки черезъ t , непосредственно получаемъ, что t будучи умножено на распоръ H , дастъ изгибающій моментъ въ данномъ мѣстѣ, взятый по отношенію къ оси арки. Такъ на примѣръ, для произвольной точки дуги M , силу D_1 , приложенную въ верхней точкѣ отрѣзка t , можно разложить на силы B и K , причемъ сила B даетъ моментъ относительно точки M равнымъ нулю, а сила K дастъ моментъ

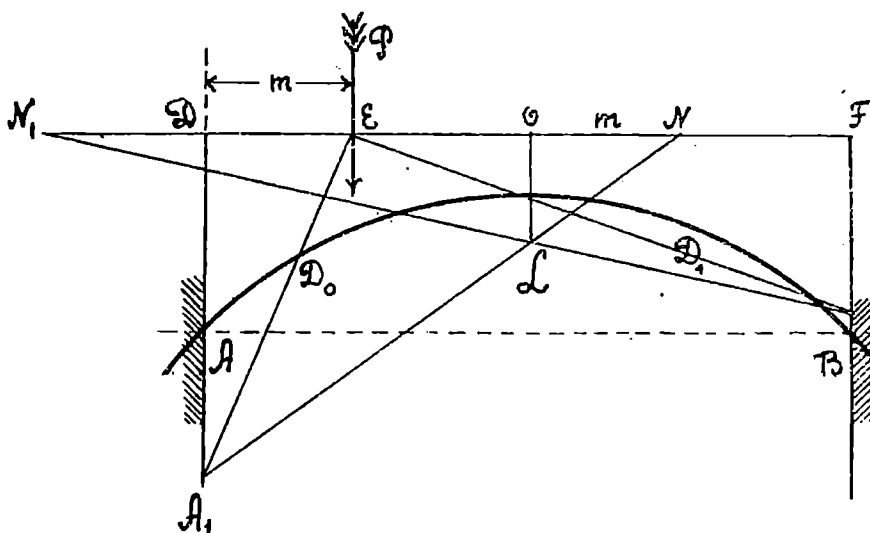
$$M = H \cdot t \quad . \quad |130|$$

Точки пересѣченія кривой давленія съ осью арки будутъ въ тоже время нулевыми точками моментовъ; тамъ, гдѣ кривая давленія располагается выше или ниже оси арки, моменты положительны или отрицательны. Тогда какъ въ аркѣ съ 2-мя шарнирами опорныя давленія, соответствующія какому-либо сосредоточенному грузу, вполне опредѣлялись линіей опорныхъ давленій, такъ какъ они проходили черезъ шарниры A и B , для арки безъ шарнировъ оказывается еще необходимымъ найти точки A_1 и B_1 , что нетрудно сдѣлать, опредѣляя графически величину V_a , входящую въ уравненіе |129|, а именно: отъ середины O линіи опорныхъ давленій $D F$ [фиг. 72] откладываемъ внизъ

$$OL = \frac{8}{15} \cdot b \cdot \left(1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2} \right)$$

и принимаемъ L за постоянную точку, служащую для вычерчивания опорныхъ давленій. Если какой-нибудь грузъ P

Фиг. 72.



помѣщается въ точку E , то переносимъ отъ отърезка $DE = m$ въ положеніе ON и проводимъ NL до пересѣченія съ вертикалью черезъ опору въ точкѣ A_1 ; тог-

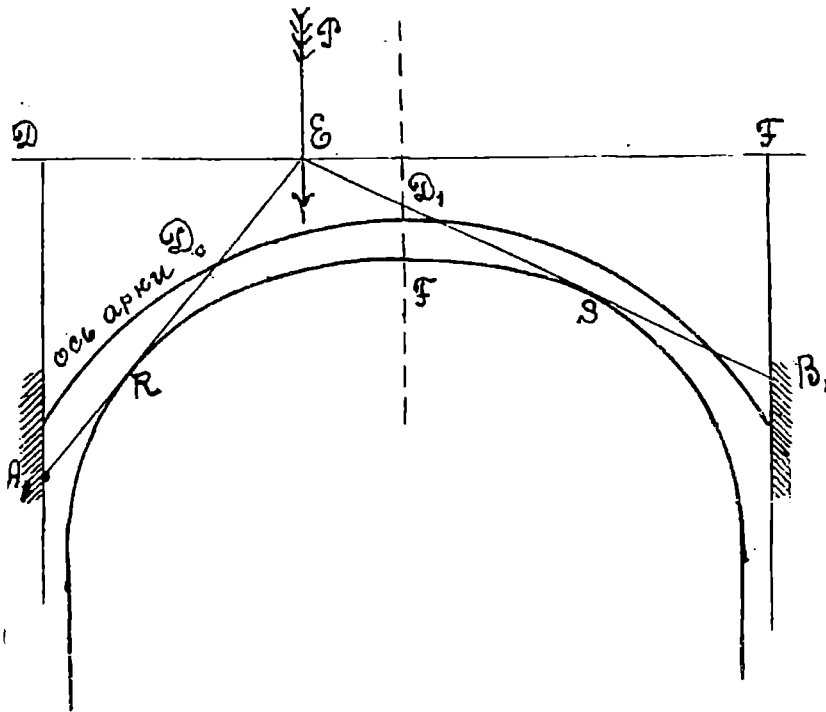
да; $DA_1 : DN = OL : ON$ или

$$DA_1 = \frac{8}{15} \cdot b \cdot \left(1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2} \right) \frac{\frac{l}{2} + m}{m} = V_a$$

Такимъ образомъ A_1E является направлениемъ силы D_0 . Дѣлая затѣмъ $ON_1 = l - m$ и проводя линію N_1LB_1 , получимъ точно также положеніе точки B_1 и направленіе D_1 . Принявъ m за переменную, т.е. передвигая грузъ, мы построимъ подобнымъ же образомъ для каждого значенія m

направление \mathcal{D}_0 и \mathcal{D}_1 , опорных давлений и получим се-
рию прямых линий, огибающих некоторую кривую линию
|фиг. 73| \mathcal{RFS} . Эта кривая носит название кривой,
огливаемой опорными давлениями или кривой обертки опор-

Фиг. 73.



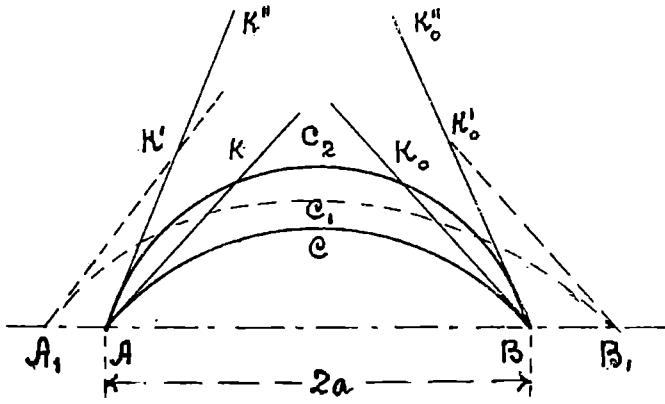
ных давлений.
Аналитическія из-
слѣдованія пока-
зываютъ, что кривая,
огливаемая опору-
ными давлени-
ями, для раз-
сматриваемаго
случая есть ги-
пербола, съ дву-
мя симметричны-
ми половинами,
сходящимися въ
вершинѣ \mathcal{F} , гдѣ

онѣ имѣютъ общую горизонтальную касательную. Кривая опор-
ных давлений и кривая, огливаемая опорными давленими,
вполнѣ опредѣляютъ опорныя сопротивленія. Дѣйстви-
тельно, проведя изъ точки \mathcal{E} - пересѣченія груза \mathcal{P} съ кривой
опорных давлений - касательныя къ кривой, огливаемой
опорными давленими, въ точкахъ \mathcal{R} и \mathcal{S} |фиг. 73|, по-
лучаемъ направление $\mathcal{A}_1\mathcal{R}\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}\mathcal{S}\mathcal{B}_1$ опорных давлений \mathcal{D}_0
и \mathcal{D}_1 . Для иныхъ формъ арокъ всѣ линіи будутъ, конечно,

уклоняться отъ только что найденныхъ, но во всякомъ случаѣ ихъ всегда можно будетъ примѣнить къ рѣшенію данной задачи, согласно только что указаннымъ приемамъ.

41 | . ВЛІЯНІЕ ТЕМПЕРАТУРЫ. Допустимъ, какъ это дѣлали для двухшарнирныхъ арокъ, что арка нагревается или охлаждается равномерно на t° , причемъ арка ненагружена. Обозначимъ искомый распоръ арки отъ температуры черезъ

Фиг. 74.



H_t . Если бы арка ACB не была бы закреплена въ опорахъ A и B и могла свободно расширяться при измѣненіи температуры, то при повышеніи ея на t° , арка приняла бы другую форму $A_1C_1B_1$,

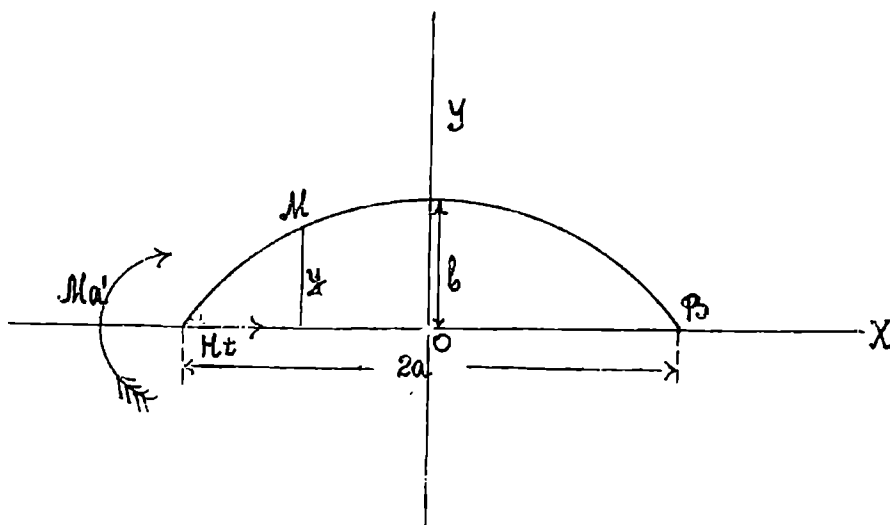
подобную первоначальной ACB , причемъ длина хорды $AB = 2a$ измѣнилась бы на величину $2\alpha t a$, а касательныя AB и BK_0 на опорахъ къ оси арки перешли бы въ положеніе A_1K' и $B_1K'_0$, параллельныя предыдущимъ.

Приложивъ къ концамъ A_1 и B_1 арки двѣ равныя и противоположныя силы H_t , мы могли бы привести точки A_1 и B_1 арки въ первоначальное положеніе A и B , но при этомъ форма арки измѣнится въ нѣкоторую другую форму AC_2B которой въ точкахъ A и B будутъ соответствовать касательныя AK'' и BK''_0 , наклонныя къ AB подъ

большимъ угломъ. Чтобы направленія этихъ касательныхъ совпали бы съ первоначальными, нужно приложить къ концамъ арки двѣ пары силъ, имѣющія положительный моментъ.

M'_a . Такимъ образомъ повышение температуры вызываетъ на опорахъ распоръ H_t и моментъ M'_a съ положительнымъ знакомъ, а понижение температуры вызываетъ распоръ H_t и моментъ M'_a противоположнаго направленія. Желая опредѣлить вліяніе температуры для пологихъ параболическихъ арокъ, мы можемъ воспользоваться ранѣ введенными уравненіями 100а, 100б и 100с, принявъ, согласно выяснен - нымъ ранѣ допущеніямъ, $N = - H_t$; $ds = dx$. При - чемъ изгибающій моментъ относительно любой точки M , взятой на оси арки, выразится величиной: $M = M'_a - H_t \cdot y$ [фиг. 75], а первая производная отъ работы деформаций v

Фиг. 75.



по статически неопредѣлимой величинѣ H_t будетъ изобра - жать, какъ извѣстно, перемѣщеніе по направленію силы рас - порѣ H_t , которое, какъ мы только что выяснили, равно

$$\frac{2\alpha t a}{2} = \alpha t a$$

Согласно сказанному имеемъ:

$$\frac{dN}{dH_t} = -\rho; \quad \frac{dM}{dH_t} = \frac{d(M'_a - H_t \cdot \gamma)}{dH_t} = -\gamma;$$

$$\frac{dV}{dH} = -\alpha t a; \quad \frac{dN}{dM'_a} = 0; \quad \frac{dM}{dM'_a} = \frac{d(M'_a - H_t \gamma)}{dM'_a} = 1$$

Уравнения I00в и I00с преобразуются для данного случая въ уравнения:

$$\int_0^a \frac{H_t}{\epsilon \omega} \cdot dx - \int_0^a \frac{M_t \gamma}{\epsilon \gamma} \cdot dx = \alpha t a \quad \dots |I31в|$$

$$\int_0^a \frac{M}{\epsilon \gamma} \cdot dx = 0 \quad \dots |I31с|$$

Подставляя значеніе $M = M'_a - H_t \cdot \gamma$, получаемъ окончательно:

$$H_t \int_0^a \frac{dx}{\varepsilon \omega} - M_a' \int_0^a \frac{y \cdot dx}{\varepsilon \cdot \gamma} + H_t \int_0^a \frac{y^2 dx}{\varepsilon \gamma} = \alpha t a \dots |I32 \text{ в} |$$

$$M_a' \int_0^a \frac{dx}{\varepsilon \gamma} - H_t \int_0^a \frac{y \cdot dx}{\varepsilon \gamma} = 0 \dots |I32 \text{ с} |$$

Если ε и γ постоянны, то выведя ихъ изъ подъ знака интеграла и замѣняя γ величиной ωz^2 , а значеніе интеграловъ ранѣе выведенными величинами:

$$\int_0^a dx = a; \quad \int_0^a y \cdot dx = \frac{2}{3} a \cdot b;$$

$$\int_0^a y^2 \cdot dx = \frac{8}{15} a b^2.$$

Получимъ:

$$H_t \cdot z^2 a - M_a' \cdot \frac{2}{3} a b + H_t \cdot \frac{8}{15} a b^2 = \alpha t a \varepsilon z^2 \omega;$$

$$M_a' \cdot a - H_t \cdot \frac{2}{3} a b = 0$$

Откуда находимъ: .

$$M'_a = \frac{2}{3} \cdot b \cdot H_t \dots \dots |133|$$

$$H_t = \frac{\alpha t a \varepsilon z^2 \omega}{z^2 a - \frac{2}{3} a b \cdot \frac{2}{3} b + \frac{8}{15} a b^2} =$$
$$= \frac{\varepsilon \alpha \omega t}{1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2}} \dots \dots |134|$$

Для опредѣленія положенія точки на оси арки, относительно которой изгибающій моментъ былъ бы равенъ нулю необходимо, какъ дѣлали и ранѣе, величину момента, равнаго $M'_a - H_t \cdot y$, приравнять нулю.
Получаемъ:

$$M'_a - H_t \cdot y = 0$$

откуда

$$y = \frac{M'_a}{H_t} = \frac{\frac{2}{3} b \cdot H_t}{H_t} = \frac{2}{3} b$$

Дѣйствующій моментъ отъ температуры въ вершинѣ
 $|y = b|$ будетъ равенъ:

$$M_e = M'_a - H_t \cdot b = \frac{2}{3} b \cdot H_t - H_t \cdot b =$$

$$= -\frac{1}{3} b \cdot H_t = -\frac{\epsilon \omega \alpha t b}{3 + \frac{4}{15} \cdot \frac{b^2}{z^2}} \dots |135|$$

Для нагляднаго сравненія вліянія температуры на
 двухшарнирные и задрѣланныя арки составлена ниже приво-
 димая таблица № 2 .

Выраженіе для распоровъ табл. № 2 можетъ быть видо-
 измѣнено, а именно:

$$\frac{\epsilon \omega \alpha t}{1 + \frac{8}{15} \cdot \frac{b^2}{z^2}} = \frac{\epsilon \omega z^2 \alpha t}{z^2 + \frac{8}{15} b^2} = \epsilon \gamma \alpha t \frac{1}{z^2 + \frac{8}{15} b^2}$$

и

$$\frac{\epsilon \omega \alpha t}{1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2}} = \epsilon \gamma \alpha t \frac{1}{z^2 + \frac{4}{45} b^2}$$

Если теперь пренебречь въ знаменателѣ величиной z^2
 то распоры будутъ обратно пропорціональны величинамъ

$$\left(\frac{8}{15} b^2 \right) \text{ и } \left(\frac{4}{45} b^2 \right)$$

Таблица № 2

| Величины раскрывов и моментов | $2^{\text{ой}}$ маршр. арки | Арки с закругленными концами |
|---|--|---|
| Величина раскрытия | $E\omega at \cdot \frac{1}{1 + \frac{8}{15} \frac{b^2}{z^2}}$ | $E\omega at \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{45} \frac{b^2}{z^2}}$ |
| Действующий момент y опорь: $y = 0$ | 0 | $\pm E\omega at \cdot \frac{b}{\frac{3}{2} + \frac{2}{15} \frac{b^2}{z^2}}$ |
| Действующий момент при $y = \frac{2}{3} b$ | $E\omega at \cdot \frac{b}{\frac{3}{2} + \frac{4}{5} \frac{b^2}{z^2}}$ | 0 |
| Действующий момент в верш. $y = b$ | $E\omega at \cdot \frac{b}{1 + \frac{8}{15} \frac{b^2}{z^2}}$ | $\pm E\omega at \cdot \frac{b}{3 + \frac{4}{15} \frac{b^2}{z^2}}$ |

т.е. распоръ отъ температуры у арокъ закрѣпленныхъ бу - деть больше, чѣмъ таковой у двухшарнирныхъ, въ отношеніи

$$\frac{8}{15} b^2 : \frac{4}{45} b^2 = 6 : 1$$

почти въ 6 разъ. Дѣйствующіе моменты отъ температуры въ закрѣпленныхъ аркахъ - въ опорахъ и вершинѣ - также всегда больше, чѣмъ таковое у двухшарнирныхъ арокъ. Въ про - межуткахъ же, между опорами и вершиной, изъ таблицы ус - матриваемъ обратное явленіе, а именно въ закрѣпленныхъ аркахъ есть поясъ, въ которомъ дѣйствующій моментъ отъ температуры меньше чѣмъ для двухшарнирныхъ арокъ. Поясъ этотъ правда очень ограниченный, и приближенно заключа - ется между ординатами:

$$y = \frac{3}{5} b \quad \text{и} \quad y = \frac{4}{5} b$$

42 | СРАВНЕНІЕ ДВУХШАРНИРНЫХЪ АРОКЪ СЪ АРКАМИ ЗАКРѢП - ЛЕННЫМИ. Для двухшарнирныхъ арокъ мы нашли ранѣе, что на - ибольшій изгибающій моментъ - въ вершинѣ и имѣетъ вели - чину

$$M_2 = (1 - \kappa) \cdot \frac{pa^2}{2} = \frac{pa^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{8}{15} \cdot \frac{b^2}{2^2}}$$

Для закрѣпленныхъ арокъ моментъ въ вершинѣ по уравненію II6 равно:

$$M_0 = \frac{pa^2}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2}}$$

Эти два момента могутъ быть равны только въ томъ случаѣ, когда будетъ существовать равенство:

$$2 + \frac{16}{15} \cdot \frac{b^2}{z^2} = 6 + \frac{24}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2} \quad \text{или} \quad \frac{b^2}{z^2} = 7,5$$

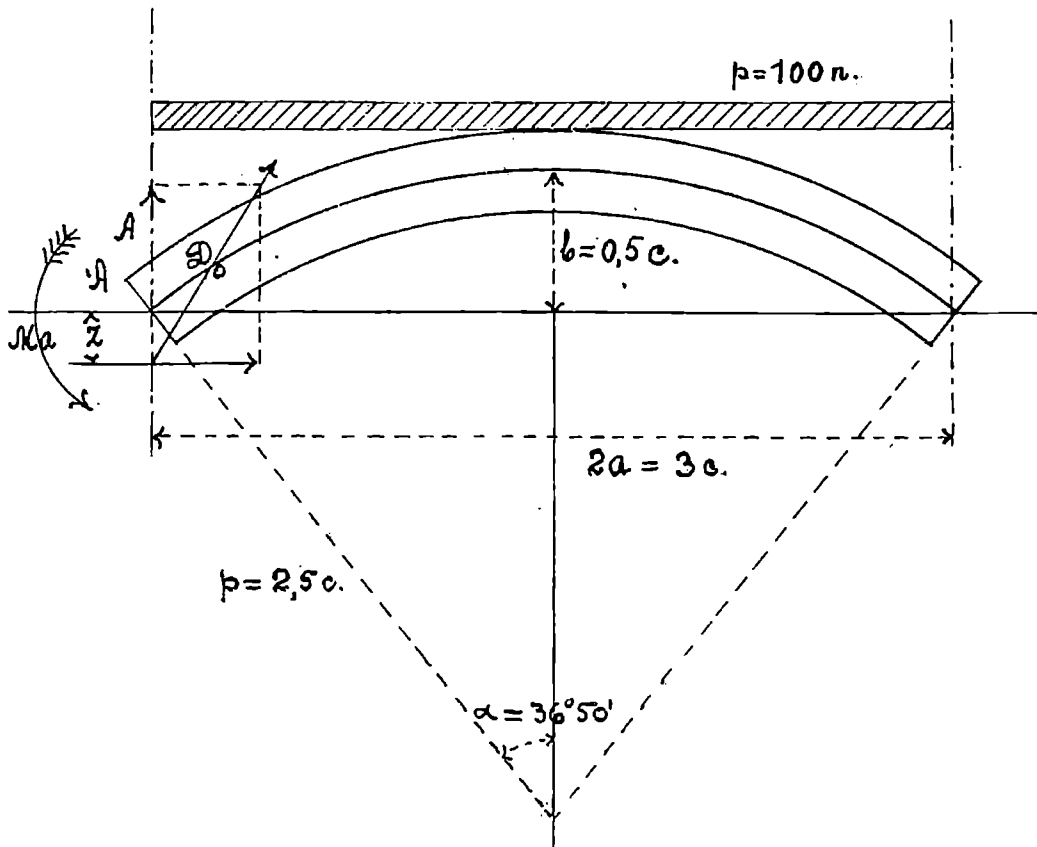
откуда $\frac{b}{z} = 2,74$

Эта величина для отношенія $\frac{b^2}{z^2}$ исключительно малая и могла бы быть только для арокъ очень пологихъ. Вообще же это отношеніе гораздо больше и изгибающій моментъ для двухшарнирныхъ арокъ поэтому меньше, чѣмъ таковой у закрѣпленныхъ арокъ.

Напримѣръ, если отношеніе $\frac{b}{z} = 6$ и $\frac{b^2}{z^2} = 36$, что часто встрѣчается въ практикѣ, то имѣемъ для двухшарнирной арки: $M_2 = \frac{5}{202} pa^2$, для арки закрѣпленной $M_0 = \frac{5}{126} pa^2$, т.е. дѣйствующій моментъ въ 1,6 раза болѣе. Для опоръ закрѣпленныхъ арокъ, гдѣ мо-

ментъ вдвое болѣе, чѣмъ въ вершинѣ, дѣйствующій моментъ будетъ болѣе, чѣмъ въ три раза превосходить величину максимальнаго момента двухшарнирной арки.

ЗАДАЧА. Данъ деревянный кривой брусъ [фиг. 76], про-
Фиг. 76.



летомъ $2a = 3$ саж., подъемомъ $b = \frac{1}{6} 2a = 0,5$ саж..

На брусъ дѣйствуетъ равномерно распределенная нагрузка

$p = 100$ пуд. на 1 п. саж.; брусъ постояннаго сѣченія съ осью радиуса $r = 2,5$ с. Определить размеры площади поперечнаго сѣченія бруса и величину распора H ?

Такъ какъ размеры площади сѣченія бруса неизвѣстны, то предварительно въ уравненіи 112, определяющемъ величину

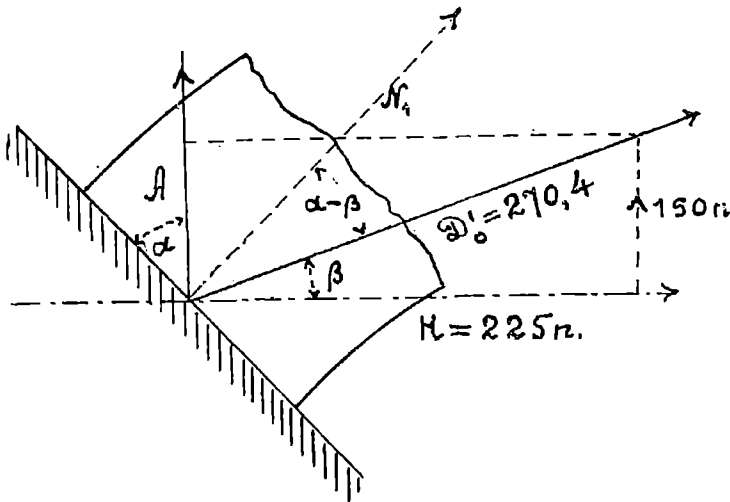
распора N пренебрегаемъ влияніемъ коэффициента поправки K_1 , и будемъ считать, что N равенъ величинѣ главного распора $N_1 = \frac{pa^2}{2b}$

Подставляя значенія $a = 1,5$ с., $b = 0,5$, получаемъ:

$$N_1 = \frac{100 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 0,5} = 225 \text{ пд.}$$

Допустимъ, что опорное сопротивление проходитъ черезъ центръ тяжести опорнаго сѣченія т.е. существованіе

Фиг. 77.



шарнира въ опорѣ, тогда вертикальная составляющая опорнаго сопротивления A , для арки равномерно загруженной равно:

$$A = \frac{2ap}{2} = ap = 1,5 \cdot 100 = 150 \text{ п.}$$

Равнодѣйствующая изъ A и N по величинѣ будетъ равна тогда [фиг. 77]:

$$D'_0 = \sqrt{A^2 + N_1^2} = \sqrt{150^2 + 225^2} = 270,4 \text{ пд.}$$

Угол β составляемый силой D'_0 с горизонталью, или силой H , равен:

$$\sin \beta = \frac{A}{D'_0} = \frac{150}{270,4} = 0,555$$

откуда угол $\beta = 33^\circ 40'$. Тогда нормальная составляющая N силы D'_0 - действующая в сечении равна:

$$N_1 = D'_0 \cos(N, D'_0) = D'_0 \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= 270,4 \cos(36^\circ 50' - 33^\circ 40') = 270,4 \cos 3^\circ 10'$$

или $N_1 = 270,4 \cdot 0,99 = 268$ пд.

Принимая прочное сопротивление на сжатие R равным 24 пудамъ на I кв. дм., получимъ, что

$$\omega > \frac{N_1}{R} = \frac{260}{24} = 11 \text{ кв. дм.}$$

Примемъ $\omega = 6 \times 3 = 18$ кв. дм.

Тогда: $H = H_1 k_1 = \frac{Pa^2}{2b} \cdot \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2}}$,

$$\text{гдѣ } z^2 = \frac{J}{\omega} = \frac{6^3 \cdot 3}{12 \cdot 6 \cdot 3} = 3 \text{ кв. дм.};$$

$$b = 0,5 \text{ м.} = 42 \text{ дм.}; \quad \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2} = \frac{45 \cdot 3}{4 \cdot 42^2} = \frac{15}{784} \approx \frac{1}{52};$$

$$K_1 = \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{z^2}{b^2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{52}} = \frac{52}{53} = 0,98$$

Слѣдовательно:

$$H = 0,98 \cdot \frac{100 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 0,5} = 0,98 \cdot 225 = 220,5 \approx 221 \text{ п.}$$

Величина опорнаго момента M_a согласно уравненія II4, равна:

$$M_a = \frac{p a^2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{b^2}{z^2}} = \frac{100 \cdot 1,5^2}{3} \cdot \frac{1}{1 + 52}$$

$$\text{или } M_a = \frac{1}{53} \cdot 75 \text{ пд. см. или } M_a = \frac{75 \cdot 84}{53} \approx 120 \text{ пд. дм.}$$

Плечо z определяется из уравнения III

$$z = \frac{15}{2} \cdot \frac{z^2}{l} = \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{42} = 0,55 \quad \text{дюйма}$$

Проверим теперь достаточность принятых размеров площади сечения ω . Проверку произведем для крайних волокон опорного сечения, как наиболее напряженного, по формулѣ

$$\frac{N}{\omega} \pm \frac{M \cdot l}{J} < R, \quad \text{гдѣ } N = D_0 \cdot \cos(N\varphi_0) = D_0 \cdot \cos(\alpha_0 - \beta_0)$$

Ввиду малой разницы между величинами N и N_1 , безъ большо́й погрѣшности, можно принять $\alpha = \alpha_0$, $\beta_0 = \beta$ и $D' = D_0$; тогда $N = N_1 = 268$ пуд. Величина изгибающаго момента $M = N \cdot od$; но $N = D_0 \cdot \cos(\alpha_0 - \beta_0)$, а изъ $\triangle Oda$ |фиг. 78|:

$$\frac{od}{Oa} = \frac{\sin(90 - \beta_0)}{\sin[90 - (\alpha_0 - \beta_0)]} = \frac{\cos \beta_0}{\cos(\alpha_0 - \beta_0)} \quad \text{или}$$

$$od = z \frac{\cos \beta_0}{\cos(\alpha_0 - \beta_0)}; \quad \text{слѣдовательно } M = N \cdot od =$$

$$= \frac{D_0 \cdot \cos(\alpha_0 - \beta_0) \cdot z \cdot \cos \beta_0}{\cos(\alpha_0 - \beta_0)} = D_0 \cdot z \cdot \cos \beta_0,$$

Фиг. 78.

но изъ $\triangle aon$: $H = D_0 \cdot \cos \beta_0$, или

$$D_0 = \frac{H}{\cos \beta_0}$$

Окончательно получаемъ: $M = N \cdot od =$

$$= D_0 \cdot z \cdot \cos \beta_0 = H \cdot z = Mo$$

$$\gamma = \frac{6^3 \cdot 3}{12}; \quad l = \frac{6}{2}$$

Подставляя значенія въ формулу:

$$\frac{N}{\omega} \pm \frac{M \cdot l}{j} < R$$

получаемъ:

$$\frac{268}{6 \cdot 3} \pm \frac{120 \cdot 6 \cdot 12}{2 \cdot 6^3 \cdot 3} < 24 \quad \text{или} \quad 15 \pm 7 < 24,$$

слѣдовательно площадь сѣченія достаточна.

Въ вершинѣ изгибающій моментъ

$$M_0 = \frac{pa^2}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{45} \cdot \frac{e^2}{z^2}} = 60 \text{ пуд. дюйм.}$$

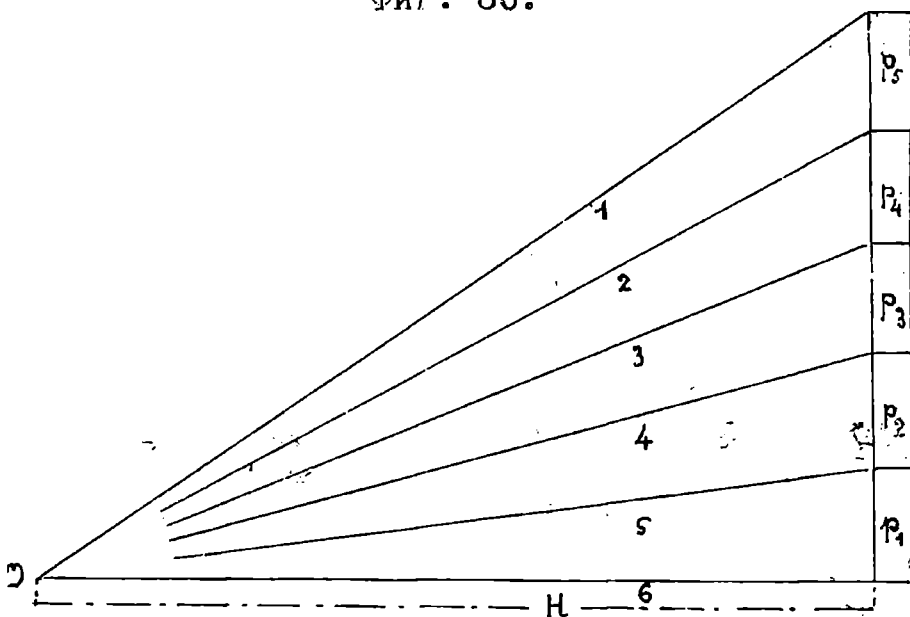
по знаку — противоположенъ M_a

Наибольшее напряжение въ крайнихъ волокнахъ площади сѣченія въ вершинѣ равно:

$$\frac{N}{\omega} \pm \frac{M_0 \cdot z}{J} < R \text{ или } \frac{221}{6 \cdot 3} \pm \frac{60 \cdot 6 \cdot 12}{2 \cdot 6^3 \cdot 3} < 24 \text{ или}$$

$$12,3 \pm 3,3 < 24$$

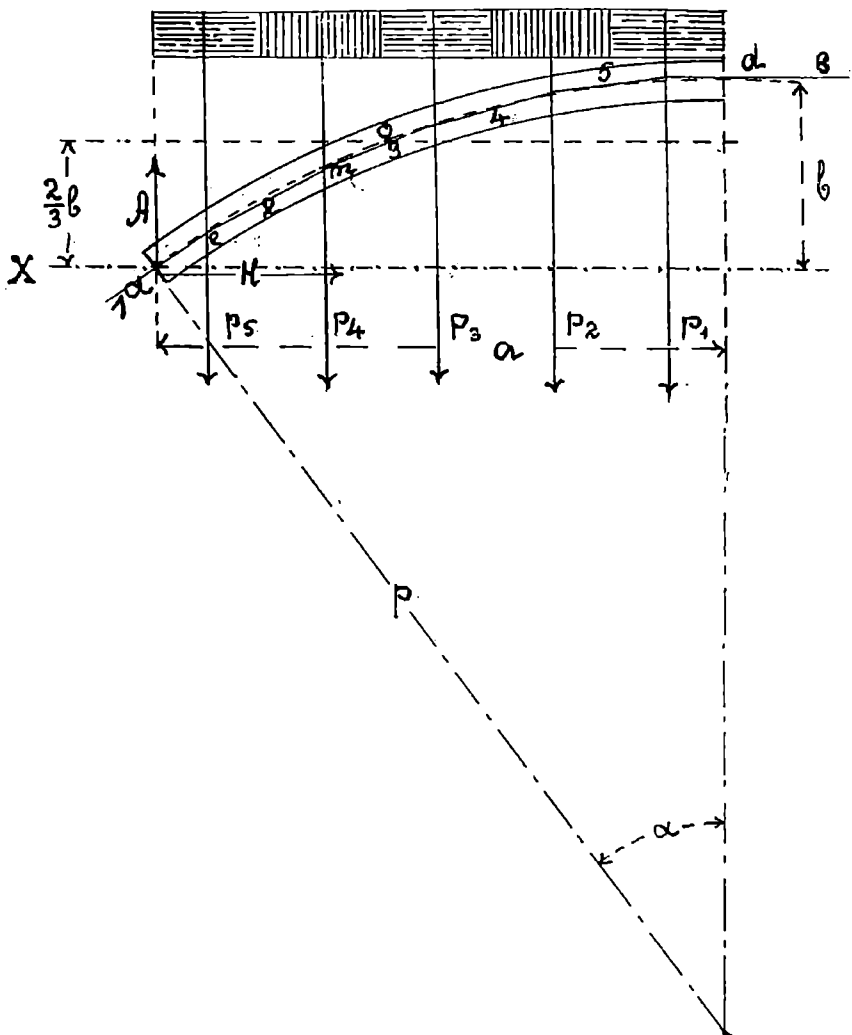
Фиг. 80.



Зная величину распора N и величину плеча его z въ опорномъ швъ можно построить кривую давления бруса. Въ виду симмет-

ричности бруса и его нагрузки, можно построить кривую давлениа для одной половины бруса, другая будетъ съ ней симметричная. Для этой цѣли разбиваемъ половину нагруз - ки, приходящейся на арку, на нѣкоторое число равныхъ ча - стей [фиг. 79], чѣмъ мельче части, тѣмъ лучше. Каждую часть принимаемъ за сосредоточенный грузъ, проходящій при равномерной нагрузкѣ черезъ середины грузовыхъ дѣле -

Фиг. 79



ній; въ дан - номъ случаѣ имѣемъ 5 гру - зовъ P_1, P_2, \dots, P_5 . На [фиг. 80] строимъ для полученныхъ грузовъ мно - гоугольникъ силъ полюсомъ O въ раз - стояннн H отъ него и лучами |1-2-3-5|. Со - отвѣтственно полученнымъ лучамъ на чер - арки [фиг. 79]

строимъ веревочный многоугольникъ $a e t s d$, причеъ $a e$ параллельно лучу 1, $e t$ параллельно лучу 2 и т.д., Сторона $s e$ веревочнаго многоугольника должна пройти черезъ точку A , которая получается, если по вертикаль A отъ центра тяжести опорнаго сѣченія отложить внизъ величину плеча Z . Внизъ потому, что согласно § 37, моментъ M_a по знаку отрицательный. Веврочный многоугольникъ $a e t s d$ и есть кривая давленія для разсматриваемаго бруса. Если она построена правильно, то согласно § 37, она должна пересѣчь ось арки въ точкѣ O , находящейся въ разстояніи $\frac{2}{3} b$ отъ оси x , ибо въ этой точкѣ изгибающій моментъ равенъ нулю. Въ вершинѣ кривая давленія будетъ располагаться вверхъ отъ оси, ибо въ этомъ мѣств дѣйствующій моментъ M_0 противоположнаго знака съ M_a .

Желая сравнить задѣланный въ пятахъ брусъ съ двухшарнирнымъ, мы должны были бы для опредѣленія величины распора двухшарнирнаго бруса воспользоваться уравненіями 59 и 56, а именно:

$$H = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{z^2}{b^2}} \cdot \frac{p a^2}{2 b} = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{3}{42^2}} \cdot \frac{100 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 0,5} =$$

$$= 0,99 \cdot 225 = 223 \text{ пуд.}$$

Максимальный моментъ для двухшарнирнаго бруса въ вершинѣ и, согласно уравненію 74, равенъ:

$$M_2 = (1 - \kappa) \frac{pa^2}{2} = \frac{1}{1 + \frac{8}{15} \cdot \frac{e^2}{z^2}} \cdot \frac{pa^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{315} \cdot \frac{100 \cdot 1,5^2 \cdot 84}{2} \text{ пуд. дюйм.}$$

или $M_2 = 30$ пуд. дюйм., т.е. въ два раза меньше M_0 и въ 4 раза M .

43 | ПОЛУЦИРКУЛЬНЫЯ ИЛИ ПОВЫШЕННЫЯ АРКИ . Для полуциркульныхъ арокъ и вообще для арокъ, для которыхъ отношеніе подъема къ пролету:

$$\frac{f}{l} > \frac{1}{3,5}$$

нельзя принимать $ds = dx$ и $N = -H$

Въ этомъ случаѣ необходимо точно выразить зависимость N отъ дѣйствующихъ усилій на арку и подъ интегралами сохранить значеніе ds . При пользованіи, для изслѣдованія вопроса, принципомъ производной отъ работы деформаций точность полученныхъ результатовъ будетъ зависеть отъ исходнаго уравненія работы деформаций для арки т.е. примемъ ли мы уравненіе 14 или уравненіе 15.

Въ настоящемъ параграфѣ изслѣдованіе наведемъ, исходя изъ уравненія 15 г.е.

$$V = \int_0^l \frac{N^2 ds}{2 \cdot E \omega} + \int_0^l \frac{M^2 ds}{2 \cdot E J}$$

и рассмотримъ два случая загрузенія симметричныхъ арокъ: симметричное и несимметричное.

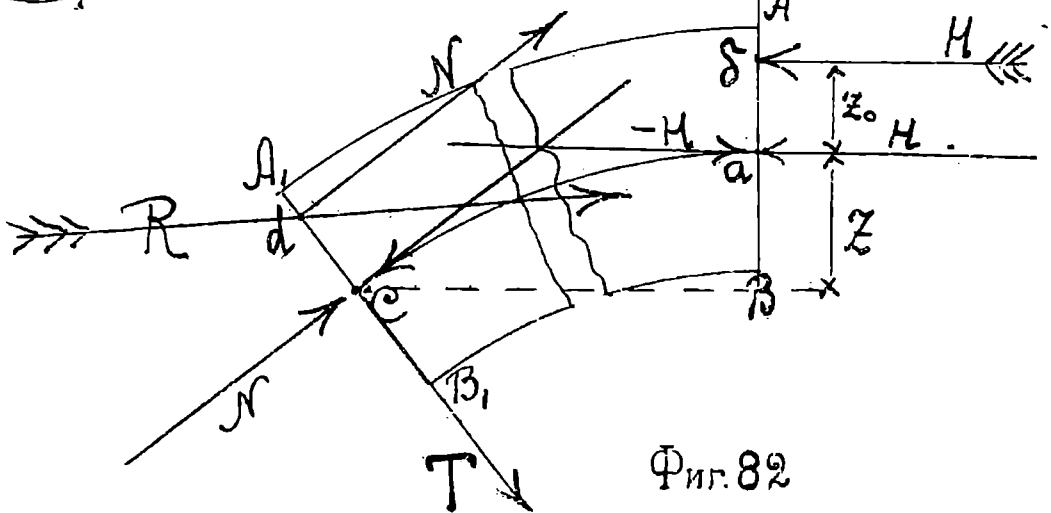
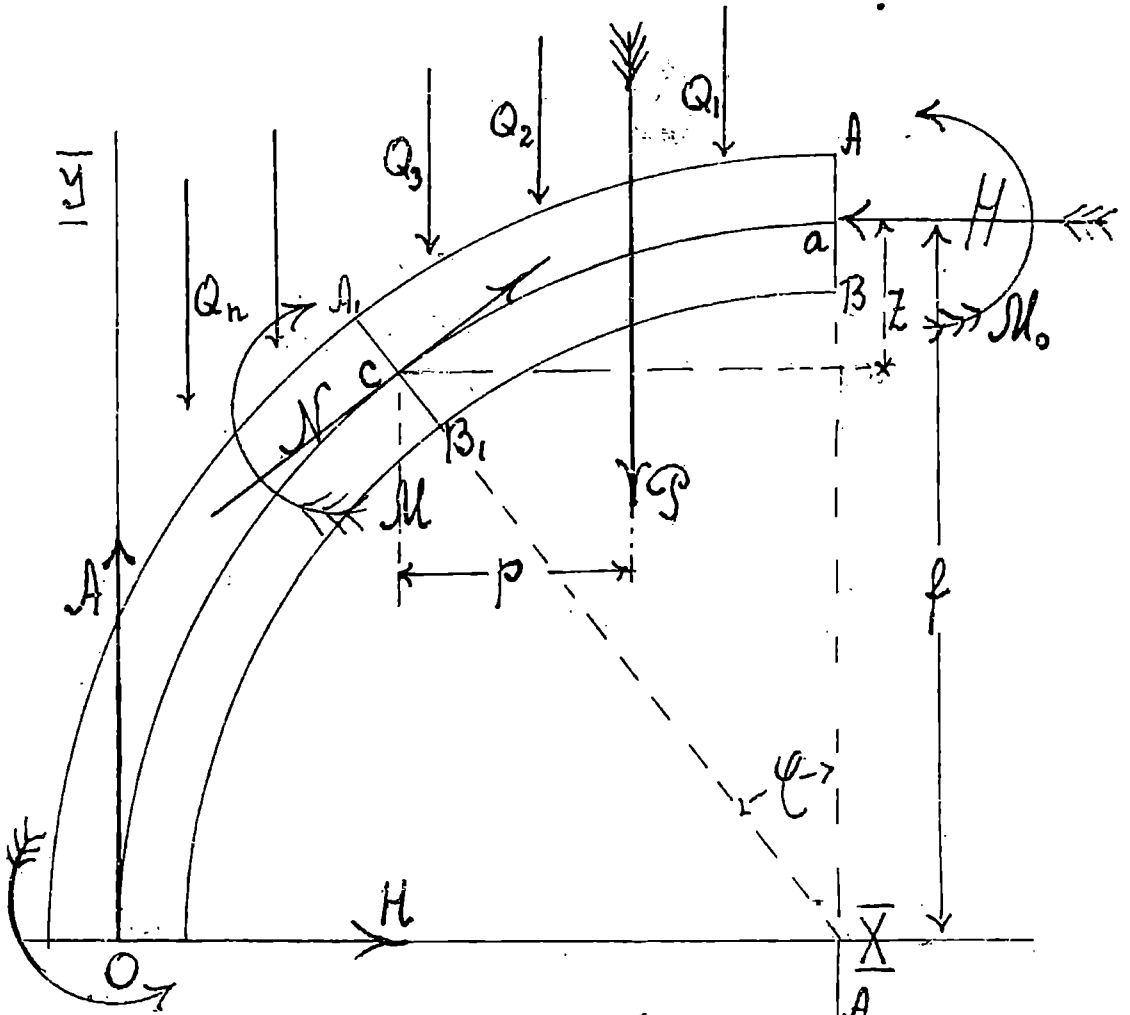
А | АРКИ СИММЕТРИЧНО ЗАГРУЖЕННЫЯ.

Въ виду симметричной загрузки арокъ можно разсматривать лишь половину арки.

Вертикальныя опорныя сопротивленія арокъ будутъ равны между собой и каждое равно половинѣ всей загрузки, считая въ томъ числѣ и собственный вѣсъ арки. Статически неопредѣлимыми величинами, будутъ, следовательно: распоръ арки H и опорный моментъ или "моментъ заделки". Равносильно, можно принять за статически неопредѣлимыя величины: распоръ арки H и моментъ въ ключѣ. Дѣйствительно, пусть на фиг. 81 дана симметричная и симметрично загруженная вертикальными грузами, арка. Выдѣлимъ часть арки ABB_1A_1 и замѣнимъ дѣйствіе на нее оставшихся частей силами R и H приложенными въ неизвѣстныхъ намъ по положенію точкахъ b и d |см. фиг. 82|.

По причинѣ симметріи сила H горизонтальна. Силу R можно разложить на составляющія: N - нормальную

Фиг. 81



Фиг. 82

къ сѣченію A, B, \dots и T - дѣйствующую вдоль сѣченія и
 провѣдывающую перерѣзваніе. Пренебрегая вліяніемъ силы
 T , мы получимъ силы N и H дѣйствующими въ точкахъ
 d и δ [фиг. 82], въ сѣченіяхъ $A, B,$ и $A B$.

Переносимъ теперь силы N и H въ центры тяжести со-
 отвѣтственныхъ сѣченій, получимъ окончательно а) силы
 N и H , дѣйствующія въ центрахъ тяжести c и a сѣче-
 ній $A, B,$ и $A B$ и в) моменты M и M_0 , паръ силъ отъ
 переноса послѣднихъ, причемъ $M = N \cdot dc = N \cdot n$ и
 $M_0 = H (a\delta) = H \cdot z_0$. Для вѣситаго произвольно сѣченія
 $A, B,$ моментъ и нормальная сила могутъ быть определе-
 ны изъ основныхъ условій; что для равновѣсія вырѣзка не-
 обходимо, чтобы моменты внутреннихъ и внешнихъ силъ и
 сумма проекцій всѣхъ силъ на нормаль къ сѣченію $A, B,$
 равнялись бы порознь нулю, т.е.

$$M + \mathcal{P}_p - H z - M_0 = 0$$

и

$$N - \mathcal{P} \sin \varphi - H \cos \varphi = 0$$

откуда

$$M = M_0 + H \cdot z - \mathcal{P} p$$

$$N = P \sin \varphi + H \cos \varphi \quad \dots \quad |137|$$

На основаніи полученныхъ уравненій 136 и 137, мы можемъ опредѣлить для любого произвольнаго сѣченія, а следовательно и для пятоваго, моментъ и нормальную силу разъ только будутъ извѣстны величины H и M_0 .

Последнія величины и примемъ за статическимъ неопредѣлимыми. Тогда на основаніи принципа производной отъ работы деформаций получимъ, въ предѣлахъ $S = \frac{L}{2}$,

$$\int_0^S \frac{N}{E\omega} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} \cdot ds + \int_0^S \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial H} ds = 0 \quad \dots \quad |138a|$$

$$\int_0^S \frac{N}{E\omega} \cdot \frac{\partial N}{\partial M_0} ds + \int_0^S \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_0} ds = 0 \quad \dots \quad |138b|$$

Изъ уравненій 136 и 137 имѣемъ:

$$\frac{\partial N}{\partial H} = \cos \varphi ; \quad \frac{\partial M}{\partial H} = z \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial N}{\partial M_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$$

Если теперь допустить для общности рѣшенія, что ар-
на переменнаго сѣченія, шириной въ 1 ед. и вмѣсто ω и
 \int принять величины:

$$\omega = 1 \cdot e \quad \text{и} \quad \int = \frac{e^3 \cdot 1}{12}$$

то подставляя значенія M , N и производныхъ въ уравне-
нiя 138 и производя необходимыя дѣйствiя, получимъ

$$\begin{aligned} & H \left\{ \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi \cdot ds}{e} + 12 \int_0^s \frac{z^2 ds}{e^3} \right\} + 12 M_0 \int_0^s \frac{z ds}{e^3} = \\ & = 12 \int_0^s \frac{P \cdot p \cdot z ds}{e^3} - \int_0^s \frac{P \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot ds}{e} \quad \dots |139a| \\ & \quad \text{и} \\ & 12 H \int_0^s \frac{z ds}{e^3} + 12 M_0 \int_0^s \frac{ds}{e^3} = 12 \int_0^s \frac{P \cdot p ds}{e^3} \quad \dots |139b| \end{aligned}$$

Если теперь обозначить значенія интеграловъ буквенными -
т.е.

$$\int_0^s \frac{z ds}{e^3} = A; \quad \int_0^s \frac{ds}{e^3} = B; \quad \int_0^s \frac{z^2 ds}{e^3} = C; \quad \int_0^s \frac{P \cdot p \cdot ds}{e^3} = D$$

$$\int_0^s \frac{P_p \cdot z \cdot ds}{e^3} = \epsilon; \quad \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi \cdot ds}{e} = F_1; \quad \int_0^s \frac{P \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{e} = 0$$

то получимъ систему двухъ уравненій.

$$\left. \begin{aligned} H[F + 12C] + 12M_0 A &= 12\epsilon - G \\ 12H A + 12M_0 B &= 12D \end{aligned} \right\} \dots |140|$$

Рѣшая совмѣстно полученныя уравненія 140, имѣемъ:

$$H = \frac{B(12\epsilon - G) - 12D A}{B(F + 12C) - 12A^2} \dots |141|$$

$$M_0 = \frac{D(F + 12C) - A(12\epsilon - G)}{B(F + 12C) - 12A^2} \dots |142|$$

и

$$z = \frac{M_0}{H} = \frac{D(12C + F) - A(12\epsilon - G)}{B(12\epsilon - G) - 12AD} \dots |143|$$

Рѣшеніе опредѣленныхъ интеграловъ $A, B, \dots G$ вычисляютъ обыкновенно по формулѣ Симпсона, для чего

полу-арка должна быть раздѣлена на четное число клиньевъ, равной ширины δ считая послѣднюю по длинѣ осевой линіи арки. Вычисленіе интеграловъ по формулѣ Симпсона будетъ указано въ § 44. Здѣсь же мы можемъ упростить рѣшеніе вопроса, замѣнивъ интегрированіе суммированиемъ для всѣхъ клиньевъ полуарки, причемъ, такъ какъ $dS = \Delta S$, при равной ширинѣ клиньевъ, будетъ величина постоянная, то въ ниже введенныхъ уравненіяхъ она пропадетъ.

Если теперь въ уравненіе I41 и I42 подставить вмѣсто A, B, C ихъ значенія, въ видѣ сумм, то получимъ :

$$I = \frac{\sum \frac{1}{e^3} \left\{ 12 \sum \frac{P \cdot P \cdot Z}{e^3} - \sum \frac{P \cdot \sin \varphi \cdot C s \varphi}{e} \right\} - 12 \sum \frac{P \cdot P}{e^3} \sum \frac{Z}{e^3}}{\sum \frac{1}{e^3} \left\{ \sum \frac{C s^2 \varphi}{e} + 12 \sum \frac{Z^2}{e^3} \right\} - 12 \left(\sum \frac{Z}{e^3} \right)^2} \quad |I44|$$

и

$$I = \frac{\sum \frac{P \cdot P}{e^3} \left\{ \sum \frac{C s^2 \varphi}{e} + 12 \sum \frac{Z^2}{e^3} \right\} - \sum \frac{Z}{e^3} \left\{ 12 \sum \frac{P \cdot P \cdot Z}{e^3} - \sum \frac{P \cdot \sin \varphi \cdot C s \varphi}{e} \right\}}{\sum \frac{1}{e^3} \left\{ \sum \frac{C s^2 \varphi}{e} + 12 \sum \frac{Z^2}{e^3} \right\} - 12 \left(\sum \frac{Z}{e^3} \right)^2} \quad |I45|$$

x |

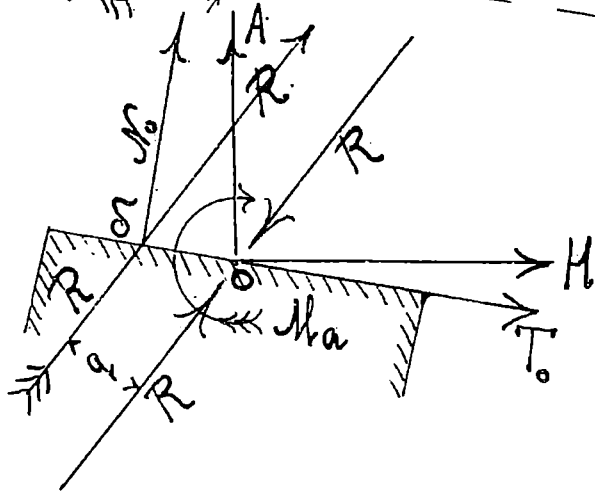
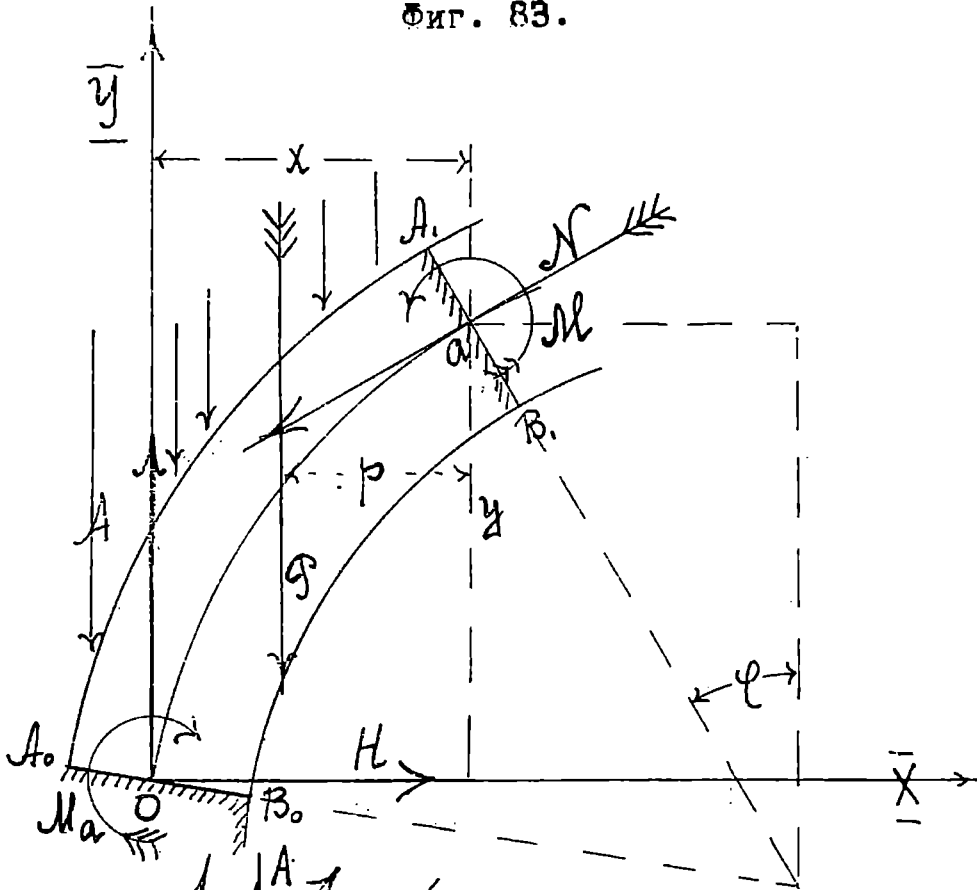
Смотри "Примѣры расчета каменныхъ мостовъ" профессора Е.О. Патона.

Опредѣливъ значенія M_0 и N , можно будетъ вычислить значенія M и N для каждаго шва по формуламъ 136 и 137. Точка приложенія нормальной силы N рассчитывается по формулѣ $n = \frac{M}{N}$, опредѣляющей разстоянiе точки приложенія силы N отъ центра шва. Знакъ плеча n соответствуетъ знаку момента M . При положительномъ значенiи M - величина n соответствуетъ верхней половинѣ клинъевъ, при отрицательномъ - нижней половинѣ. Откладывая всѣ плечи n и соединяя полученныя точки приложенія N получимъ искомую кривую давленiя.

В | АРКИ НЕСИММЕТРИЧНО ЗАГРУЖЕННЫЯ

При несимметричномъ нагруженiи арокъ вертикальныя опорныя сопротивленiя не будутъ равны между собой, по - этому прибавляются въ данномъ случаѣ лишнiя неизвѣстныя - вертикальныя опорныя сопротивленiя. Въ виду этого необходимо разсматривать часть арки между пятой A_0, B_0 и ка-кимъ либо сѣченiемъ A, B_1 , координаты центра тяжести котораго $|a|$ пусть будутъ x и y [фиг. 83]. Реакцiя пя-ты можетъ быть представлена силой R , неизвѣстной ни по величинѣ, ни по направленiю, ни по точкѣ ея приложе-нiя $|b|$ [фиг. 84]. Перенося силу R въ центръ тяжести $|o|$ пятового сѣченiя, получимъ силу R - приложенной въ центръ тяжести сѣченiя и пару съ моментомъ $M_a = Rg$. Силу R въ свою очередь разложимъ на вертикальную со-ставляющую A и горизонтальную H . Такимъ образомъ для

Фиг. 83.



Фиг. 84

разсматриваемой опоры арки получаемъ три статически
несредѣлимыхъ величины: моментъ заделки или опорный
моментъ M_a , вертикальное сопротивление опоры - A

и горизонтальное - распоръ H .

Замѣтимъ здѣсь же, что, подобно предыдущему, мы могли бы силу R разложить на нормальную N_0 и тангенціальную T_0 |фиг. 84| и отъ этого величина опорнаго момента не измѣнилась бы, такъ какъ

$$R_0 = N_0(\delta_0) + T_0 \cdot 0 = N_0 \cdot r_0 = M_a$$

Въ сѣченіи A, B , мы получимъ дѣйствию отброшенной части арки эквивалентнымъ ^х : нормальной силѣ N , дѣйствующей въ центрѣ тяжести $|a|$ сѣченія и моменту M . Величины силы N и момента M опредѣлятся, аналогично сказанному въ пунктѣ A даннаго параграфа, изъ равенствъ:

$$M = M_a + A \cdot x - H \cdot y - P r \quad \dots |146|$$

$$N = - \{ P \sin \varphi - H \cos \varphi - A \sin \varphi \} \quad \dots |147|$$

^х | Вліяніємъ силы T пренебрегаемъ подобно тому, какъ это дѣлалось при симметричномъ загрузеніи |пун. A |.

Расчетъ слѣдуетъ распространить на всю арку.
 На основаніи принципа производной работы деформациі
 получимъ нижеслѣдующія три уравненія, аналогичныя вы-
 введеннымъ въ § 36, т.е.

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \int_0^L \frac{N}{E\omega} \cdot \frac{\partial N}{\partial A} ds + \int_0^L \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial A} = 0 \quad |100a|$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \int_0^L \frac{N}{E\omega} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} ds + \int_0^L \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial H} = 0 \quad |100b|$$

$$\frac{\partial V}{\partial M_a} = \int_0^L \frac{N}{E\omega} \cdot \frac{\partial N}{\partial M_a} ds + \int_0^L \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_a} = 0 \quad |100c|$$

Причемъ производныя, согласно уравненій 146 и 147, бу-
 дутъ равны

$$\frac{\partial N}{\partial A} = + \sin \varphi; \quad \frac{\partial N}{\partial H} = + \cos \varphi; \quad \frac{\partial N}{\partial M_a} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial A} = x; \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -y; \quad \frac{\partial M}{\partial M_a} = 1$$

Примемъ кромѣ того,

$$\omega = \rho \cdot 1 \quad \text{и} \quad J = \frac{\rho^3}{12}$$

Замѣняя интегрирование суммированиемъ для всѣхъ швовъ или сѣченій арки отъ 0 до m , можно будетъ сократить всѣ уравненія на постоянную величину $dS = \Delta S$ и написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$12M_a \int \frac{x}{\rho^3} + 12A \int \frac{x^2}{e^3} + A \int \frac{\sin^2 \varphi}{e} - 12H \int \frac{xy}{e^3} +$$

$$+ H \int \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{e} = 12 \int \frac{P \cdot \rho \cdot x}{e^3} + \int \frac{P \cdot \sin^2 \varphi}{e} \quad |148a|$$

$$12M_a \int \frac{y}{e^3} + 12A \int \frac{x \cdot y}{e^3} - A \int \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{e} - 12H \int \frac{y^2}{e^3} -$$

$$- H \int \frac{\cos^2 \varphi}{e} = 12 \int \frac{P \cdot \rho \cdot y}{e^3} - \int \frac{P \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{e} \quad |148b|$$

$$M_a \sum \frac{1}{e^3} + A \sum \frac{x}{e^3} - H \sum \frac{y}{e^3} = \sum \frac{P_p}{e^3} \dots |148b|$$

Для симметричной арки съ симметрично расположенными сѣченіями [швами] можно въ уравненіи 148 ввести слѣдующія упрощенія:

1 | Такъ какъ $\sin \varphi$ имѣетъ въ обѣихъ половинахъ свода положительныя значенія, между тѣмъ какъ $\cos \varphi$ получается разнаго знака въ обѣихъ половинахъ свода, то

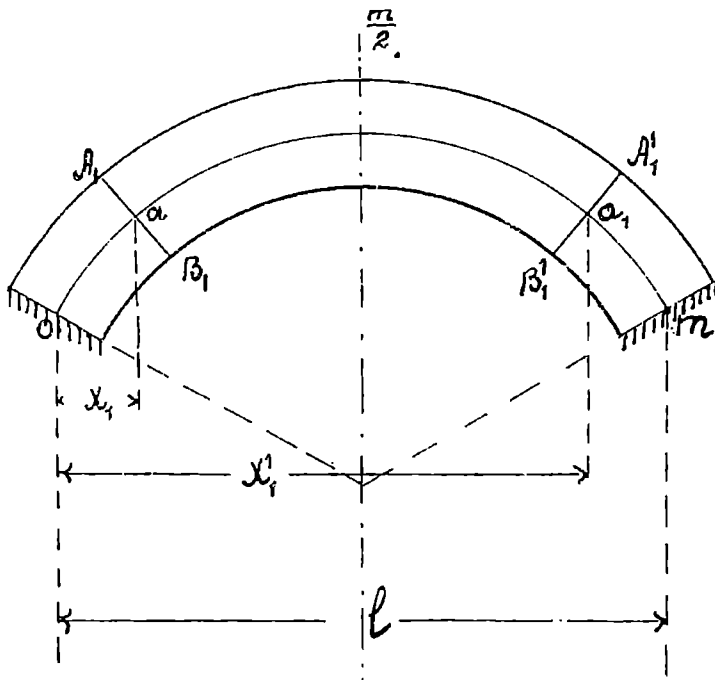
$$\sum \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{e} = 0$$

Поэтому исчезнутъ изъ уравненій 148а и 148б члены:

$$H \sum \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{e} = 0 \quad \text{и} \quad A \sum \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{e} = 0$$

2 | Суммируя попарно значенія $\frac{x}{e^3}$, соотвѣтствующія каждой парѣ сѣченій A, B_1 и A', B'_1 , расположенныхъ симметрично относительно вертикальной оси арки, получимъ согласно фиг. 85

Фиг. 85.



$$\sum_0^m \frac{x}{e^3} = \sum_0^{\frac{m}{2}} \frac{x_1 + x_1'}{e_1^3} + \frac{x_2 + x_2'}{e_2^3} \dots =$$

$$= \sum_0^{\frac{m}{2}} \frac{l}{e_1^3} + \frac{l}{e_2^3} + \dots = l \sum_0^{\frac{m}{2}} \frac{1}{e^3} = \frac{l}{2} \sum_0^m \frac{1}{e^3} \dots \quad |149|$$

Подставляя значеніе уравненія 149 въ членъ

$$\sum_0^m \frac{x \cdot y}{e^3}$$

получимъ

$$\sum_0^m \frac{x \cdot y}{e^3} = \sum_0^m \frac{l}{2} \cdot \frac{y}{e^3} = \frac{l}{2} \sum_0^m \frac{y}{e^3} \dots |150|$$

3| Вводя только что указанные упрощения въ уравненія 148 и раздѣляя уравненіе 148а на $6l \sum \frac{1}{e^3}$, уравненіе 148б на $12 \sum \frac{y}{e^3}$ и уравненіе 148в на $\sum \frac{1}{e^3}$ получимъ:

$$M_a + \frac{12 \sum \frac{x^2}{e^3} + \sum \frac{\sin^2 \varphi}{e}}{6l \sum \frac{1}{e^3}} \cdot A - \frac{\sum \frac{y}{e^3}}{\sum \frac{1}{e^3}} \cdot H =$$

$$= \frac{12 \sum \frac{P.p.x}{e^3} + \sum \frac{P \cdot \sin^2 \varphi}{e}}{6l \sum \frac{1}{e^3}} \dots |151a|$$

$$M_a + \frac{l}{2} A - \frac{12 \sum \frac{y^2}{e^3} + \sum \frac{\cos^2 \varphi}{e}}{12 \sum \frac{y}{e^3}} H =$$

$$= \frac{12 \sum \frac{P.p.y}{e^3} - \sum \frac{P \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{e}}{12 \sum \frac{y}{e^3}} \dots |151б|$$

$$M_a + \frac{l}{2} A - \frac{\sum \frac{y}{e^3}}{\sum \frac{1}{e^3}} H = \frac{\sum \frac{P \cdot p}{e^3}}{\sum \frac{1}{e^3}} \dots |151a|$$

Вычитая уравнение 151b из уравнения 151a, получим:

$$A = \frac{12 \sum \frac{P \cdot p \cdot x}{e^3} - 6l \sum \frac{P \cdot p}{e^3} + \sum \frac{P \cdot \sin^2 \varphi}{e}}{12 \sum \frac{x^2}{e^3} - 3l^2 \sum \frac{1}{e^3} + \sum \frac{\sin^2 \varphi}{e}} \dots |152|$$

Вычитая уравнение 151b из уравнения 151б, получим:

$$H = \frac{\sum \frac{1}{e^3} \left[12 \sum \frac{P \cdot p \cdot y}{e^3} - \sum \frac{P \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{e} \right] - 12 \sum \frac{y}{e^3} \sum \frac{P \cdot p}{e^3}}{12 \left(\sum \frac{y}{e^3} \right)^2 - \sum \frac{1}{e^3} \left[12 \sum \frac{y^2}{e^3} + \sum \frac{\cos^2 \varphi}{e} \right]} \dots |153|$$

Определив значения A и H , легко определить и последнюю неизвестную M_a из уравнения 151a. Зная же величины A , H и M_a можно на основании

уравнений 146 и 147 определить для всех сечений величины: для изгибающего момента M и нормальной силы

N , а по последним и расстояния $|r|$ точек приложения равнодействующей от центров сечений из ра-

венства:

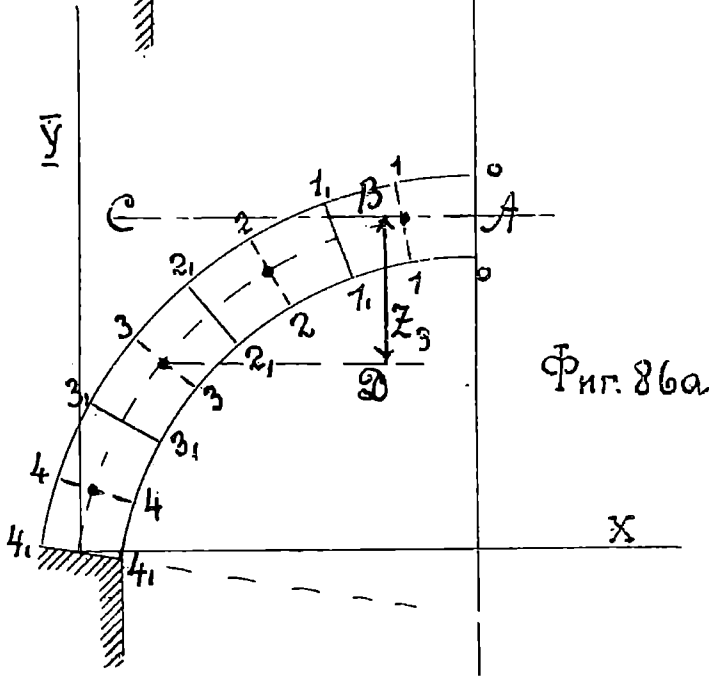
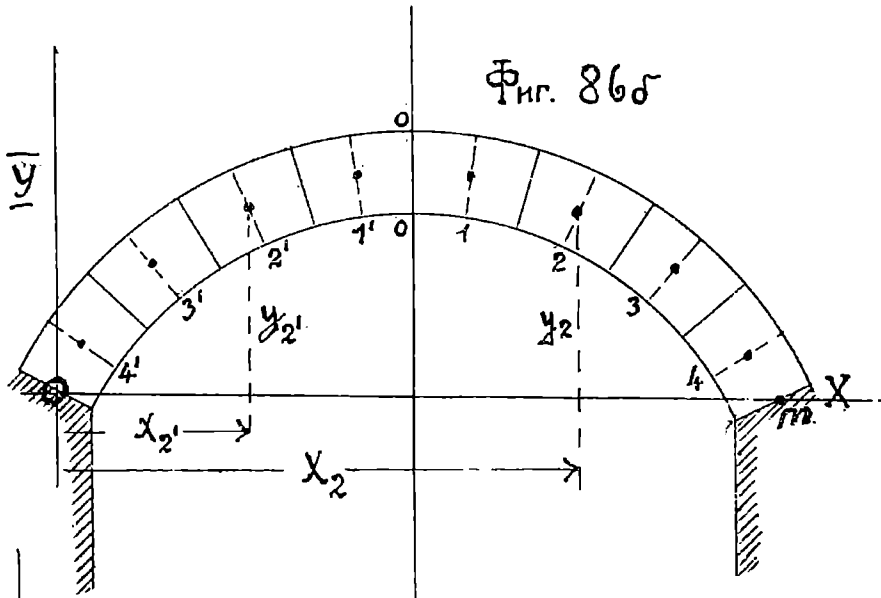
$$r = \frac{M}{N}$$

Откладывая всѣ разстоянія r и соединяя полученные такимъ образомъ точки приложенія силъ, получимъ искомую кривую давленія. Знака плеча r соотвѣтствуетъ знаку момента M .

С | ОБЩІЕ ЗАМѢЧАНІЯ КЪ РАЗСЧЕТУ.

I | Для расчета ось арки дѣлится на четное число равныхъ отрѣзковъ и черезъ точки дѣленія проводятся радіальные швы $|0-0|$, $|1-1|$, $|2-2|$ и т.д. |фиг. 86|, ограничивающіе клинья. Найдя центры тяжести каждаго клина, проводятъ черезъ нихъ радіальныя оси клиньевъ $|1-1|$, $|2-2|$ |фиг. 86а| и $|1-1|$; $|2-2|$... и $|1^1-1^1|$, $|2^1-2^1|$ |фиг. 86б|. Длина каждой изъ радіальныхъ осей, заключенная между очертаніями арки и будетъ изображать собой соотвѣтственную величину e т.е. e_1 , e_2 , e_3 ... и т.д.

При симметричной нагрузкѣ черезъ X обозначаемъ разстояніе центра радіальной оси клина отъ горизонтальной оси, проведенной черезъ центръ ключевого шва, напримѣръ, для третьяго клина |фиг. 86а| $BD = X_3$. При несимметричной нагрузкѣ для центра радіальной оси каждаго клина опредѣляются координаты X и Y , отне-



сенныя къ горизонтальной оси X , проходящей через центры пята 0 и m арки [фиг. 86б]. Такъ, например, для швовъ $|2'-2'|$ и $|2-2|$ координаты будутъ: Y_2' и Y_2 , X_2' и X_2 [см. фиг. 86б].

2 | Статическіе моменты $|P p|$ вертикальныхъ силъ, лежащихъ между ключевымъ швомъ и рассматриваемымъ - для

симметричной нагрузки, и между пятовым швом и рассматриваемым - для несимметричной нагрузки, определяют - ся относительно центра радиальной оси каждого клина или аналитически или графически, при помощи веревочного многоугольника. Графический методъ будетъ изложенъ ниже въ § 44, здѣсь же замѣтимъ, что онъ не достаточно точенъ. Что же касается аналитического метода, то его можно упростить, если при расчетѣ статическаго момента относительно каждого послѣдующаго клина пользоваться известнымъ статическимъ моментомъ относительно предыдущаго клина, применяя слѣдующую формулу.

$$J_n \cdot r_n = J_{n-1} \cdot r_{n-1} + c \sum_0^{n-1} Q \quad - |154|, \text{ гдѣ}$$

c - расстояние между центрами n^{a_20} и $|n-1|^{a_20}$ клина.

$$\sum_0^{n-1} Q$$

сумма вертикальныхъ силъ расположенныхъ отъ $|n-1|^{a_20}$ клина до ключа, въ случаѣ симметричной нагрузки и до лѣвой пяты, въ случаѣ несимметричной нагрузки.

З| Для удобства расчета неизвестныхъ M_0 , N , M_a и A , входящихъ въ выраженія для момента M и нормальной силы N , составляется таблица, образецъ, которой приведенъ въ численномъ примѣрѣ, прилагаемомъ ниже. Нумерацію швовъ рекомендуется производить влѣво и

вправо отъ ключевого шва.

4 | Пользуясь таблицей и найденными значеніями статически неопредѣлимыхъ величинъ можно рассчитать для радіальной оси каждаго клина значенія изгибающаго момента M и нормальной силы N применяя уравненія 136 и 137 для случая симметричной загрузки и уравненія 146 и 147 для случая несимметричной загрузки. По значеніямъ M и N рассчитывается для каждаго клина разстоянія $n = \frac{M}{N}$ - точки приложенія равнодѣйствующей внѣшнихъ силъ отъ центра радіальнаго шва клина. Знакъ плеча $|n|$ одинаковъ со знакомъ момента M и не зависитъ отъ знака N . Значенія M , N и n для каждаго клина сводятся въ таблицу, образецъ которой также приведенъ въ примѣрѣ.

Значенія n откладываются по радіальной оси клиньевъ, причемъ положительное n соответствуетъ верхней, а отрицательное - нижней половинѣ клиньевъ. Соединяя найденныя точки получимъ искомую кривую давленія.

5 | При выводѣ формулъ, приведенныхъ выше, принималась ширина арки равной единицѣ. Если же ширина арки будетъ не единица, а будетъ равна, положимъ, $|a|$, то формулы неизмѣнятся, такъ какъ въ исходныхъ уравненіяхъ 138а, 138б и 100а, 100в, 100с величина $|a|$, какъ постоянная, можетъ быть вынесена изъ подъ знака интеграла и сокращена. Косвенно же вліяніе величины $|a|$ отразится лишь на величинѣ грузовъ $|P|$ и величинѣ

статических моментов \mathcal{P}_p

б) По данным значениям M , N и n для каждого шва можно рассчитать для него наибольшее и наименьшее напряжения σ , пользуясь следующими формулами из теории неравномерного сжатия [см. курс проф. В. Н. Соколовского].

I случай. Нормальная сила N приложена внутри ядра сечения рассматриваемого шва. Оба напряжения сжимающія и каждое поровнь равно:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{N}{\omega} + \frac{M \cdot v}{J} = \frac{N}{a \cdot e} \left(1 + \frac{bn}{e} \right) \\ \sigma_{\min} &= \frac{N}{\omega} - \frac{M \cdot v}{J} = \frac{N}{a \cdot e} \left(1 - \frac{bn}{e} \right) \end{aligned} \right\} \dots |155|$$

II случай. Сила N приложена на границѣ ядра сечения [средней трети шва]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{2N}{a \cdot e} \\ \sigma_{\min} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots |156|$$

III с л у ч а й. Сила \mathcal{N} приложена внѣ ядра сѣченія. Напряженія имѣютъ разнѣе знаки. При аркахъ металлическихъ и желѣзо-бетонныхъ напряженія рассчитываются по общей формулѣ.

$$\sigma = \frac{\mathcal{N}}{\omega} \pm \frac{\mathcal{M} \cdot v}{J} \quad \dots \quad |157|$$

При каменныхъ, кирпичныхъ и бетонныхъ аркахъ напряженія рассчитываются по формулѣ:

$$\sigma = \frac{2\mathcal{N}}{3 \cdot a \cdot b} \quad \dots \quad |158|$$

гдѣ b - расстояние силы \mathcal{N} отъ крайнихъ сжимающихъ волоконъ сѣченія. Случай III для каменныхъ и бетонныхъ арокъ - допускается только при особѣ-исключительныхъ обстоятельствахъ. Общее же правило, чтобы кривая давленія помещалась бы въ ядрѣ сѣченія арки и возможности ближе къ осевой линіи ея.

П р и м ъ р ъ:

Дана повышенная разгрузная арка, шириной въ 0,54 с. пролетомъ 4,66 сж. и выносомъ 1,65 сж. Толщина арки въ замкѣ принята въ 0,33 сж., въ пятахъ - въ 0,50 сж. Нагрузка симметричная.

Для расчета половина арки разбита на 8 клиньевъ.
Вѣса каждого клина въ отдѣльности нижеслѣдующіе.

$$\text{Вѣсъ I клина} - P_1 = 720 \text{ пуд.}$$

$$\text{Вѣсъ II клина} - P_2 = 720 \text{ пуд.}$$

$$\text{Вѣсъ III клина} - P_3 = 680 \text{ пуд.}$$

$$\text{Вѣсъ IV клина} - P_4 = 670 \text{ пуд.}$$

$$\text{Вѣсъ V клина} - P_5 = 630 \text{ пуд.}$$

$$\text{Вѣсъ VI клина} - P_6 = 580 \text{ пуд.}$$

$$\text{Вѣсъ VII клина} - P_7 = 530 \text{ пуд.}$$

$$\text{Вѣсъ VIII клина} - P_8 = 450 \text{ пуд.}$$

Опредѣляемъ центры тяжести каждого клина и проводимъ черезъ нихъ радіальныя оси клиньевъ: |1 - 1|, |2-2| |3 - 3| |8 - 8| |Листъ III. Чер. I|.

Измѣряемъ длины радіальныхъ осей |1 - 1| |2 - 2| . . . и, обозначая ихъ черезъ l съ соответственнымъ индиксомъ внизу, вписываемъ въ графу 2 таблицы № 2. Далѣе проводимъ черезъ центръ ключевого шва |0 - 0| горизонтальную ось и измѣряемъ расстоянія | Z | центровъ радіальной оси клиньевъ до означенной оси. Полученныя расстоянія Z вписываемъ въ графу 3 табл. № 2. Въ графу же 4 вписываются вычисленные или измѣренные углы φ , составленные радіальными осями соответственныхъ клиньевъ съ вертикаль-

ной осью.

Опредѣливъ основныя величины e , Z и φ , сей -
часъ же можно вычисленіемъ опредѣлить и вспомоgetель -
ныя величины, обозначенныя въ графахъ 8, 9, 10, 11, 14,
15, 16, 17, 18 и 19 таблицы № 2.

Для опредѣленія величинъ статическихъ моментовъ
 \mathcal{P} намъ необходимо знать каждый разъ величину рав -
нодѣйствующей изъ вѣсовъ, лежащихъ между рассматри -
ваемымъ клиномъ и ключевымъ швомъ. Удобнѣе всего для это -
го пользоваться графическимъ приѣмомъ сложения парал -
лельныхъ силъ, а именно: на черт. 2 построены много -
угольникъ силъ $|BD|$ съ произвольно выбраннымъ полю -
сомъ O , а на черт. 1 построены соответственный веревоч -
ный многоугольникъ и найдены по величинѣ и положенію
частныя равнодѣйствующія. Для перваго клина получаемъ,
что вѣсъ его $\mathcal{P}_1 = 720$ лежитъ вправо отъ центра его тя -
жести т.е. лѣвѣ центра тяжести нѣтъ никакихъ силъ, по -
этому въ графѣ 5 для перваго клина и поставлено $|0|$.
Для втораго клина равнодѣйствующая изъ вѣсовъ \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2
равна: $\mathcal{P}^I = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = 720 + 720 = 1440$ пуд. и
разстояніе этой равнодѣйствующей, найденной по своему
положенію - веревочнымъ многоугольникомъ, отъ центра ра -
діальной оси втораго клина опредѣляется плечомъ $\rho = 0,19$,
что и вписано въ соответственныя мѣста 5 и 6^{ой} графы
таблицы № 2. Для третьаго клина - равнодѣйствующая изъ
вѣсовъ первыхъ трехъ клиновъ равна: $\mathcal{P}^{II} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 =$

Таблица № 2.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | |
|--------------------------------|------|------|------------------|------|------|--------|---------------|-----------------|-----------------|-------------------|--|-------------------|---------------------------|----------------|----------------|------------------|----------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|---|--|---------|
| № № по порядку в столбце | e | z | $\angle \varphi$ | P' | p | $P'p$ | $\frac{1}{e}$ | $\frac{1}{e^3}$ | $\frac{2}{e^3}$ | $\frac{2^2}{e^3}$ | | $\frac{P'p}{e^3}$ | $\frac{P'p \cdot 2}{e^3}$ | $\sin \varphi$ | $\cos \varphi$ | $\cos^2 \varphi$ | $\frac{\cos^2 \varphi}{e}$ | $\sin \varphi \cdot \cos \varphi$ | $\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{e}$ | $\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot p}{e}$ | | |
| 1-1 | 0,34 | 0,02 | 12° | 0 | 0 | 0,00 | 2,94 | 25,4 | 0,51 | 0,010 | | 0,0000 | 0,0000 | 0,21 | 0,98 | 0,96 | 2,80 | 0,21 | 0,62 | 0,00 | | |
| 2-2 | 0,35 | 0,10 | 21°30' | 1440 | 0,19 | 273,6 | 2,86 | 23,4 | 2,34 | 0,234 | | 6402,24 | 640,22 | 0,37 | 0,93 | 0,86 | 2,46 | 0,34 | 0,97 | 1396,80 | | |
| 3-3 | 0,37 | 0,27 | 29°30' | 2120 | 0,31 | 657,2 | 2,70 | 19,7 | 5,31 | 1,434 | | 12946,84 | 3495,65 | 0,49 | 0,87 | 0,76 | 2,05 | 0,43 | 1,16 | 2459,20 | | |
| 4-4 | 0,39 | 0,47 | 38°30' | 2790 | 0,45 | 1255,5 | 2,56 | 16,8 | 7,88 | 3,704 | | 21092,40 | 9913,43 | 0,62 | 0,78 | 0,61 | 1,56 | 0,48 | 1,23 | 3431,70 | | |
| 5-5 | 0,42 | 0,72 | 45° | 3420 | 0,58 | 1983,6 | 2,38 | 13,5 | 9,71 | 6,991 | | 26778,60 | 19280,59 | 0,71 | 0,71 | 0,50 | 1,19 | 0,50 | 1,19 | 4069,80 | | |
| 6-6 | 0,46 | 0,99 | 49° | 4000 | 0,65 | 2600,0 | 2,17 | 10,2 | 10,12 | 10,019 | | 26520,00 | 26257,80 | 0,76 | 0,66 | 0,44 | 0,95 | 0,50 | 1,09 | 4360,00 | | |
| 7-7 | 0,48 | 1,27 | 52°30' | 4530 | 0,74 | 3952,2 | 2,08 | 9,0 | 11,43 | 14,516 | | 30169,80 | 38315,65 | 0,79 | 0,61 | 0,37 | 0,77 | 0,48 | 1,00 | 4530,00 | | |
| 8-8 | 0,49 | 1,57 | 55° | 4980 | 0,89 | 4432,2 | 2,04 | 8,5 | 13,33 | 20,836 | | 37673,70 | 59147,71 | 0,82 | 0,57 | 0,32 | 0,65 | 0,47 | 0,96 | 4760,80 | | |
| $\Sigma =$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 126,5 | 60,63 | 57,84 | | | | 161583,58 | 157048,05 | | | | | 12,43 | | | 25008,3 |

$= 1440 + 680 = 2120$ пуд. и плечо $\rho = 0,31$ и т.д.
 Опредѣливъ указаннымъ приемомъ величины \mathcal{P} и ρ , легко вычислить уже простымъ перемноженіемъ какъ величины статическихъ моментовъ графы 7 такъ и соотвѣтственныя величины 12, 13 и 20^{ой} графъ таблицы № 2.

Внизу подъ соотвѣтственными графами обозначены суммы тѣхъ величинъ, которыя входятъ въ уравненіе 144 для опредѣленія величины распора. Подставляя изъ таблицы № 2 значенія соотвѣтственныхъ суммъ въ уравненіе 144 получимъ.

$$H = \frac{126,5 \{ 12 \times 157048,05 - 25008,3 \} - 12 \cdot 161583,58 \times 60,63}{126,5 \{ 12,43 + 12 \times 57,84 \} - 12 \times (60,63)^2}$$

или $H = 2602$ пуда

Моментъ въ ключевомъ швѣ можно опредѣлить изъ уравненія 145 или, что проще, непосредственно изъ второго уравненія |140|, а именно

$$M_A + M_0 B = \mathcal{D}$$

или

$$H \sum \frac{z}{e^3} + M_0 \sum \frac{1}{e^3} = \sum \frac{\mathcal{P} \rho}{e^3}$$

Подставляя значенія H и соответственныхъ суммъ, получимъ:

$$2602 \times 60,63 + M_0 \times 126,5 = 161583,58$$

Откуда

$$M_0 = 30,23 \text{ пуд. саж.}$$

Эксцентриситетъ распора H въ ключевомъ швѣ

$$e_0 = \frac{M_0}{H} = \frac{30,23}{2602} \approx 0,012 \text{ сж.}$$

Зная величину распора H и точку его приложенія въ ключевомъ швѣ, легко построить многоугольникъ или, во - обще говоря, кривую давленія въ аркѣ. Для означенной цѣли при начальной точкѣ B многоугольника силъ возстановляемъ перпендикуляръ и откладываемъ величину $O_2 B = H$, точку O_2 принимаемъ за полюсъ и соединяемъ его лучами съ точками раздѣла грузовъ на многоугольникъ силъ DB . На ключевомъ швѣ $|0 - 0|$ откладываемъ отъ центра тяжести величину n , черезъ полученную точку проводимъ горизонтальную линію, параллельную лучу I (чер. 2) до встрѣчи съ силой S_1 , изъ полученной точки пересѣченія проводимъ дальѣ линію параллельную лучу II до встрѣчи съ силой S

и т.д. Построенная такимъ образомъ кривая давленія не выходитъ изъ ядра свѣченія арки. Повѣрку прочности въ этомъ случаѣ достаточно произвести лишь для ключевого и пятового швовъ.

Производя повѣрку прочности для ключевого шва, имѣемъ:

$$\sigma = \frac{N}{\omega} \pm \frac{M \cdot r}{J} \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{N}{\omega} \pm \frac{N \cdot n \cdot e \cdot 12}{2 \cdot a \cdot e^3}$$

или

$$\sigma = \frac{N}{\omega} \left(1 \pm \frac{6n}{e} \right), \quad \text{гдѣ} \quad N = 2602 \text{ п.}; \quad a = 0,54 \text{ см.};$$

$$e = 0,33 \text{ см.}; \quad \omega = a \cdot e = 0,54 \cdot 0,33 \cdot 7056 \cong 1256 \text{ дм.}^2$$

Подставляя численныя значенія, получаемъ:

$$\sigma = \frac{2602}{1256} \left(1 \pm \frac{6 \cdot 0,012}{0,33} \right) = 2,07 (1 \pm 0,22)$$

$$\sigma_1 = 2,07 \times 1,22 = 2,52 \quad \frac{\text{пуд.}}{\text{дм.}^2}$$

$$\sigma_2 = 2,07 \times 0,78 = 1,61 \quad \frac{\text{пуд.}}{\text{дм.}^2}$$

Для повѣрки въ пятовомъ швѣ необходимо первоначально найти величину нормальнаго давленія на шовъ. Для этого можно провести изъ полюса O_2 линію // шву |8 - 8| и изъ точки D опустить перпендикуляръ DE . Величина DE , измѣренная по масштабу силъ, и будетъ представлять собой величину нормальнаго давленія въ пятовомъ швѣ.

Если теперь измѣрить по масштабу разстояніе точки пересѣченія послѣдней стороны многоугольника давленій со швомъ |8 - 8| - отъ центра его тяжести, то получимъ величину эксцентриситета $e_8 = 0,07$ см.

Производя повѣрку прочности, получимъ:

$$\sigma = \frac{N_9}{\omega} \pm \frac{Mv}{J} = \frac{N_9}{\omega} \left(1 \pm \frac{6 \cdot e_8}{e_s} \right) \quad \text{или}$$

$$\sigma = \frac{5550}{7056 \cdot 0,54 \cdot 0,5} \left(1 \pm \frac{6 \cdot 0,07}{0,50} \right) \quad \text{или}$$

$$\sigma_1 = 5,35 \frac{\text{пуд.}}{\text{дм.}^2} \quad \text{и} \quad \sigma_2 = 0,47 \frac{\text{пуд.}}{\text{дм.}^2}$$

Такъ какъ при графическомъ построеніи кривой давленія по одному изъ найденныхъ эксцентриситетовъ и измѣреніи величинъ остальныхъ эксцентриситетовъ цир -

кулемъ неизбежны ошибки, то, при необходимости для ответственныхъ сооружений получить большую точность въ расчетахъ, рекомендуется опредѣлять аналитически для радиальной оси каждаго клина значенія изгибающаго момента M и нормальной силы N , применяя уравненія 136 и 137. По значеніямъ M и N рассчитывается для каждаго клина величина $n = \frac{M}{N}$. Для наглядности и удобства расчета значенія M , N и n помещаются въ таблицу образца № 3.

Т а б л и ц а № 3.

| № № радиальных осей клиновъ | $M = M_0 + Nz - P_r$ | $N = P \sin \varphi + K \cos \varphi$ | $n = \frac{M}{N}$ |
|-----------------------------------|----------------------|---------------------------------------|-------------------------|
| 1 - 1 | 30,75 н. см. | 2550 | 0,01205 \approx 0,012 |
| --- | --- | --- | --- |
| --- | --- | --- | --- |
| --- | --- | --- | --- |
| 8 - 8 | -316,83 | 5567 | -0,057 |

§44 | Во всѣхъ выше проведенныхъ расчетахъ упругихъ арокъ съ закрѣпленными пятнами мы пользовались сокращеннымъ выраженіемъ работы деформации.

$$V = \int_0^L \frac{N^2 ds}{2 \cdot \epsilon \omega} + \int_0^L \frac{M^2 ds}{2 \cdot \epsilon J}$$

полученнымъ изъ выраженія

$$V = \int_0^L \frac{N^2 ds}{2 \cdot \epsilon \omega} + \int_0^L \frac{M^2 ds}{2 \cdot \epsilon J} - \int_0^L \frac{M N ds}{\omega \epsilon \rho} \dots (14)$$

путемъ пропуска $\frac{z}{\rho}$ по сравненію съ единицей |смотри § 8e |. Профессоръ С. Бельзецкій^x впервые совершенно основательно указалъ на то, что пропускъ до интегрированія $\frac{z}{\rho}$ по сравненію съ единицею ведетъ къ нѣкоторымъ погрѣшностямъ. По расчетамъ профессора Ф. Ясинскаго оказывается, что для пологихъ сводовъ этотъ пропускъ отзывается главнымъ образомъ на величинѣ опорнаго момента, измѣняя ее приблизительно на 10 - 15%. По нашимъ расчетамъ для церковныхъ арокъ, особенно сильно нагруженныхъ вблизи вершины, разница эта еще больше и достигаетъ въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ до 20%. Въ виду этого для арокъ большихъ пролетовъ и сильно нагруженныхъ необходимо производить расчетъ исходя изъ болѣе точнаго выраженія работы деформациі | 14. |. Въ особенности это важно въ церковномъ зодчествѣ для

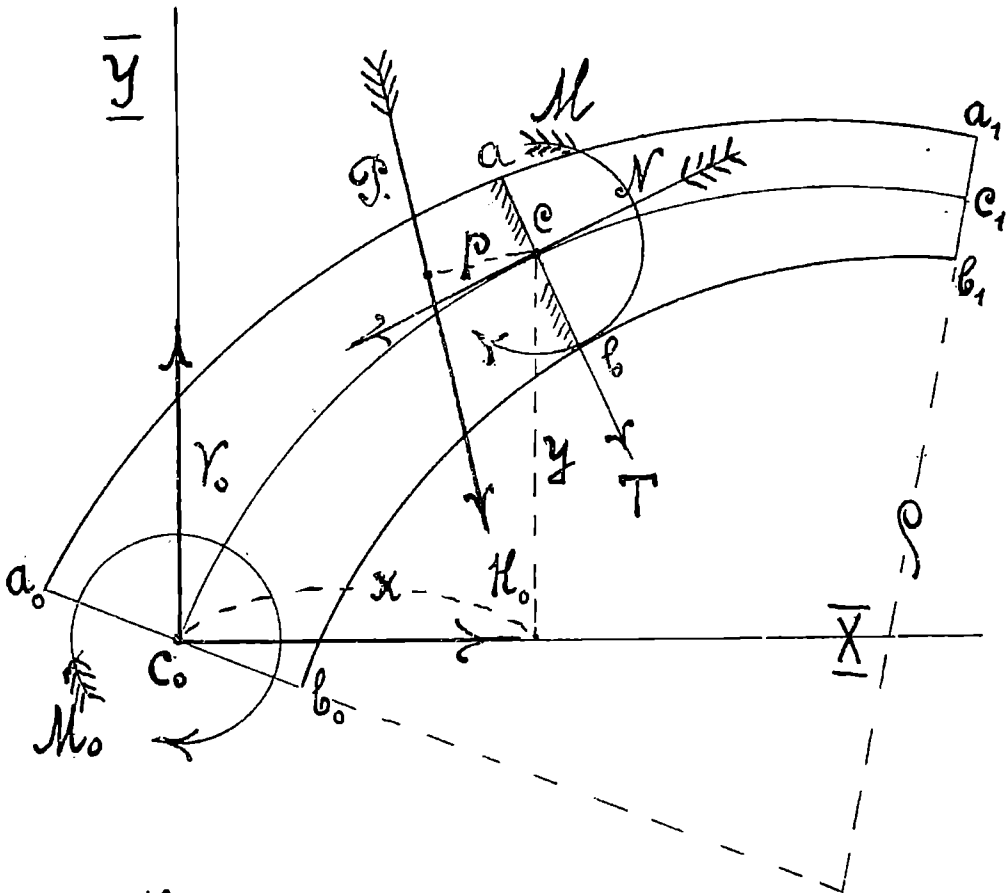
х | Смотри "Теорія каменныхъ сводовъ". Извѣстія Собранія Инженеровъ Путей Сообщенія 1898 г.

храмовъ, сооружаемыхъ по типу перекрещивающихся арокъ, гдѣ сами арки составляютъ главную и наиболѣе ответственную часть конструкции всего храма.

Общій приѣмъ расчета упругихъ арокъ отъ того, что въ основаніе будетъ принято болѣе точное выраженіе $|\frac{1}{4}|$ работы деформациі, не измѣнится; усложнятся лишь выводы и интегрированіе коэффициентовъ десяти опредѣленныхъ интеграловъ.

Пусть будетъ дана арка, шириной по образующей равной единицѣ, и подверженная дѣйствию какъ угодно направленныхъ силъ, удовлетворяющихъ лишь условію равномернаго распредѣленія вдоль образующей арки [фиг. 87]. Выдѣлимъ лѣвую часть арки отъ пяты $a_0 b_0$ до какаго-либо нормальнаго шва ab , замѣнивъ дѣйствіе правой части внутренними силами упругости, распредѣленными по сѣченію

ab , а дѣйствіе опоры - реакціями, распредѣленными по $a_0 b_0$. Въ дальнѣйшемъ будемъ придерживаться обозначеній и изложенія профессора Ф.С. Исинскаго въ томъ видѣ, въ какомъ онъ былъ разработанъ имъ въ курсѣ лекцій: „Устойчивость Деформациі и Статика Сооруженій“ [§ 44 стр. 210-226]. Всю совокупность внутреннихъ силъ, дѣйствующихъ въ сѣченіи ab , можно замѣнить [см. § 43] силами N и T , приложенными въ центрѣ тяжести C сѣченія и моментомъ M . Подобнымъ же образомъ реакціи опоры, дѣйствующія на пяту $a_0 b_0$, могутъ быть замѣнены силами N_0 и T_0 , приложенными въ центрѣ C_0 и мо-



ментомъ M_0 .

Силы N_0 и T_0 удобнѣе замѣнить вертикальной и горизонтальной составляющими γ_0 и H_0 . Внешнія активныя силы, приложенныя къ выдѣленной части арки, приводятся къ равнодѣйствующей R , плечо которой относительно точки C пусть будетъ r .

Напишемъ теперь уравненія равновѣсія выдѣленной части свода, приравнявъ нулю суммы проецій всёхъ приложенныхъ къ ней силъ на направленія N и T и сумму ихъ моментовъ относительно точки C , причемъ для сокра-

шенія письма обозначимъ косинусъ между двумя какими-либо направлѣніями N и x

$$\cos(Nx) = C_{Nx}$$

Уравненія эти будутъ

$$\left. \begin{aligned} N + P C_{PN} + V_0 C_{Ny} + H_0 C_{Nx} &= 0 \\ T + P C_{PT} + V_0 C_{Ty} + H_0 C_{Tx} &= 0 \\ M - P_{pp} + V_0 x - H_0 y + M_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots |159|$$

Необходимо замѣтить, что знаки у проекцій первыхъ двухъ уравненій |159| отнесены къ косинусамъ угловъ т.е. если уголъ тупой, то косинусъ отрицательный и наоборотъ.

Принимая во вниманіе дальѣ, что

$$C_{Tx} = -C_{Ny} \quad \text{и} \quad C_{Ty} = +C_{Nx}$$

найдемъ

$$N = -P \cdot C_{\varphi N} - V_0 C_{N y} - H_0 C_{N x}$$

$$T = -P \cdot C_{\varphi T} - V_0 C_{T x} + H_0 C_{T y}$$

$$M = P r - V_0 x + H_0 y - M_0$$

} . | 160 |

Статически неопредѣлимыя величины V_0 , H_0 и M_0 опредѣляются, на основаніи принципа производной отъ ра- боты деформаций, изъ нижеслѣдующихъ условій:

$$\frac{dV}{dV_0} = 0 ; \quad \frac{dV}{dH_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dV}{dM_0} = 0$$

Принимая же во вниманіе равенства 160 получимъ окончательно слѣдующія уравненія для опредѣленія неиз- вѣстныхъ величинъ V_0 , H_0 , M_0 .

$$- \int_0^{\alpha} \left[- \frac{P \cdot C_{\varphi N} \cdot C_{N y}}{e} + 12 \frac{P \cdot r \cdot x}{e^3} + \frac{P \cdot x \cdot C_{T x}}{e \rho} - \frac{P \cdot r \cdot C_{T y}}{e \rho} \right] ds +$$

$$+V_0 \int_0^d \left[\frac{C_{xy}^2}{e} + 12 \frac{x^2}{e^3} - 2 \frac{x \cdot C_{xy}}{e\rho} \right] ds + H_0 \int_0^d \left[\frac{C_{xy} \cdot C_{yx}}{e} + \right.$$

$$\left. - 12 \frac{x \cdot y}{e^3} + \frac{y \cdot C_{xy}}{e\rho} - \frac{x \cdot C_{yx}}{e\rho} \right] ds + M_0 \int_0^d \left[12 \frac{x \cdot y}{e^3} - \frac{C_{xy}}{e\rho} \right] ds = 0$$

$$- \int_0^d \left[\frac{P \cdot C_{yx} \cdot C_{yx}}{e} - 12 \frac{P \cdot p \cdot y}{e^3} - \frac{P \cdot p \cdot C_{yx}}{e\rho} - \frac{P \cdot y \cdot C_{yx}}{e\rho} \right] ds +$$

$$+ V_0 \int_0^d \left[\frac{C_{xy} \cdot C_{yx}}{e} - 12 \frac{x \cdot y}{e^3} - \frac{x \cdot C_{yx}}{e\rho} + \frac{y \cdot C_{xy}}{e\rho} \right] ds +$$

161

$$+ H_0 \int_0^d \left[\frac{C_{yx}^2}{e} + 12 \frac{y^2}{e^3} + 2 \frac{y \cdot C_{yx}}{e\rho} \right] ds +$$

$$+ M_0 \int_0^d \left[-12 \frac{y}{e^3} - \frac{C_{yx}}{e\rho} \right] ds = 0$$

$$- \int_0^d \left[12 \frac{P \cdot p}{e^3} + \frac{P \cdot C_{yx}}{e\rho} \right] ds + V_0 \int_0^d \left[12 \frac{x}{e^3} - \frac{C_{xy}}{e\rho} \right] ds +$$

$$+ H_0 \int_0^d \left[-12 \frac{y}{e^3} - \frac{C_{yx}}{e\rho} \right] ds + M_0 \int_0^d 12 \frac{ds}{e^3} = 0$$

Обозначая определенные интегралы первого уравнения соответственно через A_0 , A_1 , A_2 , A_3 — второго уравнения через B_0 , B_1 , B_2 , B_3 , — третьего через D_0 , D_1 , D_2 , D_3 и замечая тождества

$$B_1 = A_2; \quad D_1 = A_3; \quad D_2 = B_3$$

Можно написать уравнения |161| в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} A_1 V_0 + A_2 K_0 + A_3 M_0 &= A_0 \\ A_2 V_0 + B_2 K_0 + B_3 M_0 &= B_0 \\ A_3 V_0 + B_3 K_0 + D_3 M_0 &= D_0 \end{aligned} \right\} |162|$$

Решение в конечном виде входящих в эти уравнения в виде коэффициентов девяти определенных интегралов A , B , D вообще не всегда возможно, но с вполне достаточным приближением можно вычислить их по формуль Симпсона. С этой целью подразделяют сводъ на четное число клиньевъ, равной толщины δ , счи

тая последнюю по длине срединной линии [фиг. 88]. Начнем съ вычисления определѣннаго интеграла, вида

A_0 т.е.

$$A = \int_0^{\alpha} \alpha ds \quad , \quad \text{гдѣ для краткости письма}$$

обозначено:

$$\alpha = - \frac{P \cdot C_{\text{гн}} \cdot C_{\text{нч}}}{e} + 12 \frac{P r x}{e^3} + \frac{P x C_{\text{гн}}}{e r} - \frac{P \cdot r \cdot C_{\text{нч}}}{e r}$$

Вычислимъ значенія подынтегральной функціи α для всѣхъ швовъ $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_i, b_i$, взявъ значенія входящихъ въ нее величинъ e, x и $C_{\text{нч}}$ непосредственно изъ чертежа и опредѣливъ $r, P, P r$.

$C_{\text{гн}}$ расчетомъ, или помощью графическаго построения. Положимъ, что найдемъ слѣдующія значенія α для последовательныхъ швовъ, считая отъ лѣвой пята:

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$. Приближенное значеніе определѣннаго интеграла A_0 по формулѣ Симпсона будетъ:

$$A_0 = \frac{S}{3} \left\{ \alpha_0 + 4(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2n-1}) + \right. \\ \left. + 2(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2(n-1)}) + \alpha_{2n} \right\} \quad \dots |163|$$

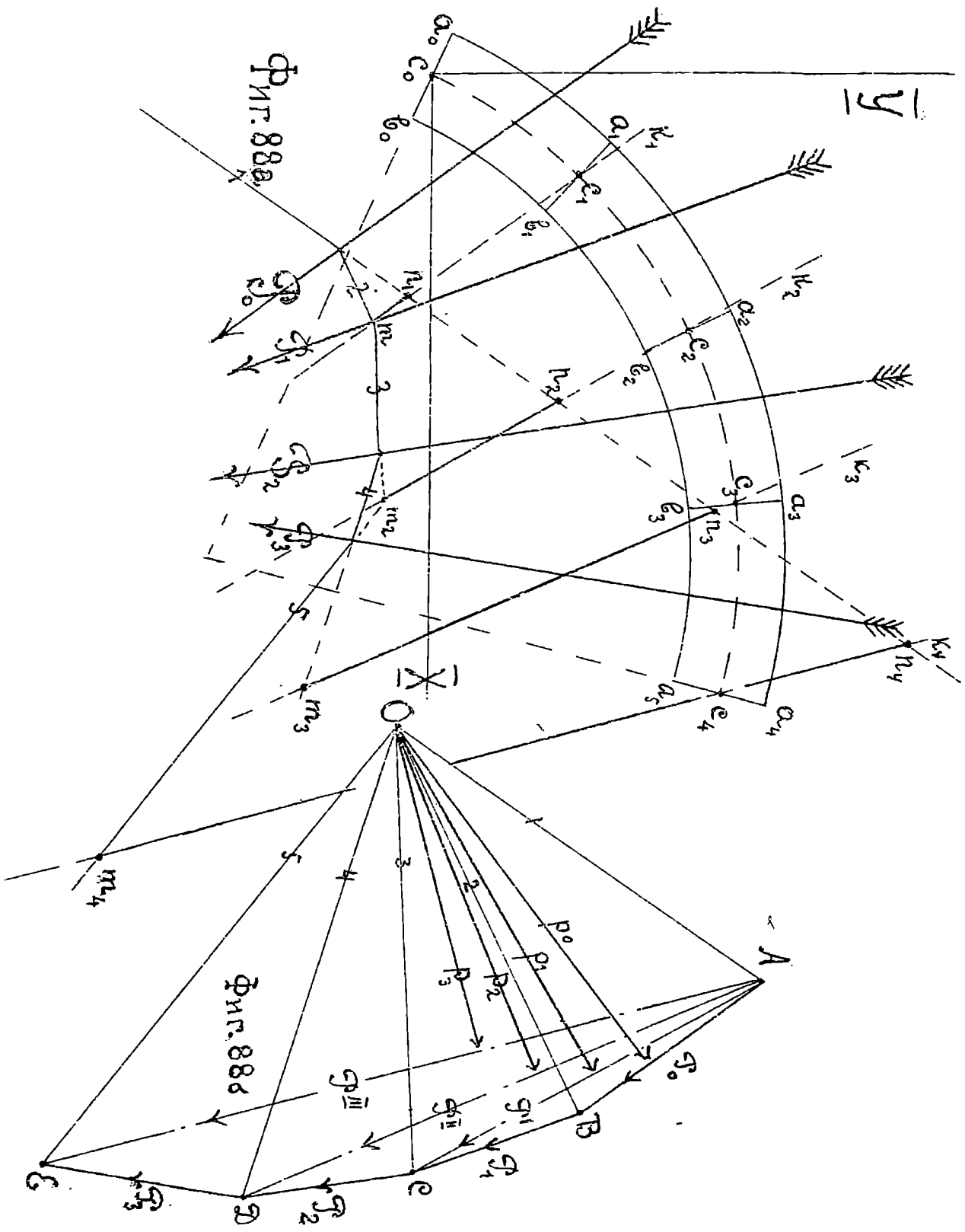
Вычисливъ подобнымъ же образомъ значенія остальныхъ восьми интеграловъ, опредѣляютъ величины V_0 ,

N_0 , M_0 по уравненіямъ 162, послѣ чего легко будетъ уже построить кривую давленія.

Входящія въ подынтегральныя функции величины P_i суть частныя равнодѣйствующія активныхъ силъ, приложенныхъ къ лѣвой части арки между пятовымъ швомъ $a_0 b_0$ и промежуточнымъ $a_i b_i$ [см. фиг. 86а], а величины $|P_i \cdot r_i|$ суть моменты этихъ равнодѣйствующихъ относительно срединъ швовъ C_i . Величины эти могутъ быть получены или аналитически, подобно изложенному въ § 43, или помощью слѣдующаго графическаго построенія фиг. 88а и 88б|.

Построивъ по произвольному полюсу O вариньесновскій и веревочный многоугольники для заданной системы активныхъ силъ $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, находимъ на первомъ изъ нихъ величины частныхъ равнодѣйствующихъ $P_0, P^I, P^{II}, \dots, P^{n-1}$. Моментъ какой нибудь изъ этихъ силъ, на примѣръ, P^{II} , относительно C_3 , центра шва $a_3 b_3$, есть произведеніе полюснаго разстоянія r_2 силы P^{II} [фиг. 88б] на отрѣзокъ $n_3 m_3$ образуемый лучами I и 4 на линіи $K_3 m_3$, проведенной черезъ C_3 параллельно силѣ P^{II} .

Въ частномъ случаѣ, когда активныя силы P_1 вертикальны, силы P^I тоже вертикальны, и всѣ по -



люсныя разстонніа ρ равны. Это въ значительной мѣрѣ упрощаетъ эпюру.

Разсчетъ значительно упрощается для симметрич - ныхъ и симметрично нагруженныхъ арокъ. Въ этомъ случаѣ вертикальныя проекціи опорныхъ сопротивленій статически опредѣлимы:

$$V_0 = \frac{1}{2} \sum_0^n P \cos(\rho y)$$

При такихъ условіяхъ равенство

$$\frac{dV}{dV_0} = 0$$

превращается въ тождество. Работы деформаций каждой изъ полуарокъ равны между собой и равны половинѣ работы деформации цѣлой арки:

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{2} V$$

Отсюда слѣдуетъ, что для каждой полуарки должно быть, какъ мы уже и видѣли ранѣе,

$$\frac{dV_1}{dH_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dV_1}{dM_0} = 0$$

Въ этомъ случаѣ достаточно вычислить только семь интеграловъ: A_2^1 , A_3^1 , B_0^1 , B_2^1 , B_3^1 и D_0^1 и D_3^1 для одной полуарки и опредѣлить неизвѣстныя K_0 и M_0 изъ уравненій 162, которыя принимаютъ здѣсь видъ:

$$\left. \begin{aligned} B_2^1 \cdot K_0 + B_3^1 M_0 &= B_0^1 - A_2^1 V_0 \\ B_3^1 \cdot K_0 + D_3^1 M_0 &= D_0^1 - A_3^1 V_0 \end{aligned} \right\} \quad |164|$$

При расчетѣ мостовыхъ арокъ подъ обыкновенныя или желѣзныя дороги временную нагрузку, состоящую въ действительности изъ сосредоточенныхъ грузовъ, можно замѣнить нагрузкой, равномерно распределенной по поверхности полотна дороги. Расчетъ достаточно произвести въ трехъ предположеніяхъ, а именно, I | при полномъ загрузеніи всего пролета, II | при загрузеніи части пролета отъ лѣвой опоры до ключевого шва и III | при загрузеніи отъ правой опоры до ключевого шва. Для симметричныхъ сводовъ достаточно произвести расчетъ въ

первомъ и въ одномъ изъ послѣднихъ предположеній, причемъ проще всего начать расчетъ при односторонней нагрузкѣ.

Составивъ таблицу данныхъ для вычисленія определенныхъ интеграловъ A , B , D , въ предположеніи односторонней нагрузки, можемъ воспользоваться ея же данными для вычисленія определенныхъ интеграловъ A' , B' , D' для полуарки въ предположеніи полного загрузенія. Дѣйствительно, интегралы A' , B' , D' , для симметричной нагрузки, отличаются отъ соответственныхъ интеграловъ A , B , D для нагрузки лѣвой половины только верхними предѣлами:

$$A_0 = \int_0^l \alpha ds$$

$$A'_0 = \int_0^{\frac{l}{2}} \alpha ds$$

такъ какъ подынтегральные функции, очевидно, будутъ тождественны. Слѣдовательно, для вычисленія интеграла A'_0 по Симпсону можно взять имѣющіяся въ таблицѣ значенія подынтегральной функции α для швовъ отъ пятового $a_0 b_0$ до ключевого $a_n b_n$ включительно и соста -

вить выражение

$$A_0' = \frac{S}{3} \left\{ \alpha_0 + 4(\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}) + \right. \\ \left. + 2(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}) + \alpha_n \right\} \dots \dots |165|$$

Подобнымъ же образомъ можно вычислить и всѣ прочіе интегралы для симметричной нагрузки, конечно для примѣненія къ нимъ формулы Симпсона, число n клиньевъ въ полусводѣ должно быть четное.

Примѣръ.

На Листѣ IV чер. I дана арка, пролетъ средней оси которой равенъ 4,65 сж., а радиусъ $\rho = 2,564$ сж. Толщина арки $b = 0,38$ сж., ширина арки равна 0,43 сж. Арка нагружена по всей ширинѣ и пролету кирпичной кладкой стѣны, указанной на чер. I. Въ виду симметричности арки и ея нагрузки, расчетъ произведенъ для половины арки. Расчетная половина арки разбита на 8 клиньевъ, одинаковой ширины $S = 0,365$ сж. Согласно предварительнымъ исчисленіямъ всѣа клиньевъ арки нижеслѣдующія:

$$\mathcal{P}_1 = 112 \text{ п.} \quad \mathcal{P}_5 = 203 \text{ п.}$$

$$\mathcal{P}_2 = 189 \text{ п.} \quad \mathcal{P}_6 = 216 \text{ п.}$$

$$\mathcal{P}_3 = 195 \text{ п.} \quad \mathcal{P}_7 = 246 \text{ п.}$$

$$\mathcal{P}_4 = 195 \text{ п.} \quad \mathcal{P}_8 = 378 \text{ п.}$$

$$V_0 = \sum_1^8 \mathcal{P} = 1734$$

Для заданной системы силъ построены по произвольному полюсу O_1 вариньоновскій |чер. 2| и веревочный |чер. 1| многоугольники силъ. Начало координатъ O принято совпадающимъ съ центромъ тяжести пятового шва | $O - O$ |. Основная величины $x, y, p, \sum \mathcal{P}$ и косинусы угловъ, найдены слѣдующимъ образомъ. Координаты центровъ тяжести швовъ точно измѣрены по масштабу разстояній. Углы, составляемые направлениемъ нормальной къ каждому шву силой съ направлениемъ осей координатъ \bar{X}, \bar{Y} и направлениемъ силъ \mathcal{P} вычислены обще известнымъ путемъ на основаніи данныхъ чертежа арки. Косинусы угловъ вычислены затѣмъ по таблицамъ |см. *Hütte* часть I|. Согласно построенному веревочному многоугольнику найдены положенія частныхъ равнодѣйствующихъ, дѣйствующихъ справа каждаго разсматриваемаго шва, величины же ихъ опредѣлены последовательнымъ суммированиемъ вѣсовъ, такъ напримѣръ, частная равнодѣйствующая для пятового шва равна нулю, частная же равнодѣйствующая для шва, положимъ, |3 - 3| равна суммѣ вѣсовъ $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ т.е. $112 + 189 + 195 = 496$ пд., а положеніе ее опредѣлится на веревоч-

номъ многоугольникъ пересѣченіемъ сторонъ 9^{ой} и 6^{ой}.
Зная же положенія частныхъ равнодѣйствующихъ, легко
опредѣлить измѣреніями по масштабу величины ρ - раз-
стоянія ихъ отъ центровъ соответственныхъ швовъ, на -
примѣръ, расстояние частной равнодѣйствующей въ 495 пд.
отъ центра шва |3 - 3| равно 0,43 |см. чер. I Листъ IV|
Опредѣливъ выше указаннымъ образомъ основныя величины,
въ дальнѣйшемъ всѣ величины, необходимыя для вычисленія
подъинтегральныхъ функций, вычисляютъ путемъ обычныхъ
алгебраическихъ дѣйствій, требуемыхъ самимъ видомъ функ-
цій. Что же касается величинъ e и f , то въ данномъ
примѣрѣ означенныя величины постоянны для всѣхъ швовъ.
Въ случаѣ ихъ переменнаго значенія онъ, какъ также ос-
новныя, должны быть тщательно измѣрены по масштабу или
вычислены отдѣльно для cadaго шва. Для удобства, пра-
вильности и наглядности расчета обыкновенно составля-
ется таблица, одинъ изъ типовъ которой и проведенъ для
даннаго примѣра |см. таблица № 4|. Въ вертикальныхъ
столбцахъ данной таблицы за номерами 20, 25, 29, 32,
35 и 38 помѣщены значенія соответственныхъ подынте -
гральныхъ функций для cadaго шва. Такъ, на примѣръ, для
вычисленія опредѣленнаго интеграла B_2^1 , имѣемъ:

$$B_2^1 = \int_0^{\frac{L}{2}} \alpha ds \quad \text{гдѣ}$$

$$\alpha = \frac{C_{\text{лх}}^2}{e} + 12 \frac{y^2}{e^3} + 2 \frac{y \cdot C_{\text{лх}}}{e \rho}$$

Пользуясь вертикальными столбцами за номерами 26, 27, 28. таблицы № 4, вычисляем значения $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_8$ для каждого шва, а именно:

$$\alpha_0 = 0,4671; \alpha_1 = 0,7826 + 21,0161 - 0,3468 = 21,4519$$

$$\alpha_2 = 1,1411 + 78,7235 - 0,8108 = 79,0538$$

$$\alpha_3 = 1,5137 + 161,7434 - 1,3384 = 161,9187$$

.....

$$\alpha_8 = 2,6316 + 479,0195 - 3,0370 = 478,6141.$$

Полученные значения для α и вписаны в вертикальный столбец № 29.

Значения интеграла B_2^1 определяются по формуле Симпсона, которая примет вид:

$$\begin{aligned} B_2^1 = \frac{h}{3} \{ & \alpha_0 + 4(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7) + \\ & + 2(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6) + \alpha_8 \} = 0,122 \{ 0,4671 + \\ & + 4(21,4519 + 161,9187 + 341,5501 + 459,4301) + \\ & + 2(79,0538 + 250,3978 + 413,2725) + 478,6141 \} = 720,03? \end{aligned}$$

Таблица

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|-------------------|-------|-------|----------------|---------|------------------|--------|-------|---------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------------------------|
| № ст. ш. б. б. в. | x | y | x ² | xy | $\frac{12}{e^3}$ | ρ | p | ρp | C _{xx} | C _{yy} | C _{xy} | C _{xx} C _{yy} |
| | | | | | | | | | - | + | - | + |
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,00000 | 0,00000 | 218,6904 | 0,0 | 0,00 | 0,00 | 0,4213 | 0,9069 | 0,9069 | 0,3821 |
| 1 | 0,180 | 0,310 | 0,0961 | 0,0558 | | 112,0 | 0,16 | 17,92 | 0,5453 | 0,8382 | 0,8382 | 0,4571 |
| 2 | 0,400 | 0,600 | 0,3600 | 0,2400 | | 301,0 | 0,29 | 87,29 | 0,6585 | 0,7526 | 0,7526 | 0,4956 |
| 3 | 0,660 | 0,860 | 0,7396 | 0,5676 | | 496,0 | 0,43 | 213,28 | 0,7584 | 0,6518 | 0,6518 | 0,4943 |
| 4 | 0,950 | 1,070 | 1,1449 | 1,0165 | | 691,0 | 0,59 | 407,69 | 0,8430 | 0,5380 | 0,5380 | 0,4535 |
| 5 | 1,275 | 1,250 | 1,5625 | 1,5937 | | 894,0 | 0,77 | 688,38 | 0,9106 | 0,4132 | 0,4132 | 0,3763 |
| 6 | 1,605 | 1,375 | 1,8906 | 2,2069 | | 1110,0 | 0,925 | 1026,75 | 0,9599 | 0,2802 | 0,2802 | 0,2690 |
| 7 | 1,970 | 1,450 | 2,1025 | 2,8565 | | 1356,0 | 1,09 | 1478,04 | 0,9899 | 0,1415 | 0,1415 | 0,1401 |
| 8 | 2,325 | 1,480 | 2,1904 | 3,3713 | | 1734,0 | 1,17 | 2028,78 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

$\rho = 2,5650; \quad e\rho = 0,9747; \quad \frac{1}{e\rho} = 1,026; \quad e = 0,38; \quad e^3 = 0,0549; \quad \frac{1}{e^3} = 18,2242;$

и а № 4

| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| $\frac{C_{xx}}{e\rho}$ | $\frac{C_{yy}}{e\rho}$ | $\frac{12\rho p}{e^3}$ | $\frac{\rho p C_{xx}}{e\rho}$ | $\rho y \frac{C_{yy}}{e\rho}$ | $\rho \frac{C_{xx} C_{yy}}{e}$ | Значение для интерп. B'_0 |
| - | - | | | | | |
| 0,4323 | 0,9305 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,5595 | 0,8600 | 1214,8689 | 10,0262 | 29,8592 | 134,7248 | - 1099,9771 |
| 0,6756 | 0,7722 | 11453,6910 | 58,9731 | 139,4533 | 392,5642 | - 11141,6070 |
| 0,7781 | 0,6687 | 40112,3681 | 165,9532 | 235,2496 | 645,1472 | - 39586,5173 |
| 0,8649 | 0,5520 | 85398,9414 | 352,6111 | 408,1046 | 824,6394 | - 84629,7955 |
| 0,9343 | 0,4239 | 188177,6213 | 634,1534 | 473,7306 | 885,3282 | - 187122,8703 |
| 0,9849 | 0,2875 | 308751,2563 | 1011,2461 | 433,7830 | 785,7690 | - 307393,0242 |
| 1,0156 | 0,1452 | 465688,0803 | 1501,0974 | 285,4330 | 449,9572 | - 466972,4637 |
| 1,0200 | 0,0000 | 656638,5704 | 2081,5283 | 0,0000 | 0,0000 | - 654557,0421 |

$\rho = 0,365; \quad \frac{\rho}{3} = 0,122$

$B'_0 = -517159,6115$

Таблица № 4

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | | | | | |
|---------------------------|----------------------|----------------------|--------------------|---------------------|----------------------|---------------------|-------------------------|-------------------|---------------------|----------------------|-------------------|---------------------|------------------------|---------------------|-------------------|----------------------|-------------------|--|------------------------|--|--|---------------------|
| $\frac{C_{Nx} C_{Ny}}{e}$ | $\frac{C_{Nx}}{e^2}$ | $\frac{C_{Ny}}{e^2}$ | $\frac{12xy}{e^3}$ | Значения α | $\frac{C_{Nx}^2}{e}$ | $\frac{12y^2}{e^3}$ | $\frac{2y C_{Nx}}{e^2}$ | Значения α | $\frac{12y}{e^3}$ | $\frac{C_{Nx}}{e^2}$ | Значения α | $\frac{12y^2}{e^3}$ | $\frac{9 C_{Py}}{e^2}$ | Значения α | $\frac{12x}{e^3}$ | $\frac{C_{Nx}}{e^2}$ | Значения α | | | | | |
| + | - | - | + | для интерп. | + | + | - | для интерп. | - | + | для интерп. | + | + | для интерп. | + | - | для интерп. | | | | | |
| | | | | A'_2 | | | | B'_2 | | | B'_3 | | | D'_0 | | | A'_3 | | | | | |
| 1,0055 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | + 1,0055 | 0,4671 | 0,0000 | 0,0000 | + 0,4671 | 0,0000 | 0,4323 | + 0,4323 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,9305 | 0,9305 | | | | | |
| 1,2029 | 0,1007 | 0,2666 | 12,2029 | - 11,1659 | 0,7826 | 21,0161 | 0,3468 | + 21,4519 | 67,7940 | 0,5595 | - 07,2345 | 3918,9320 | 96,3100 | 4015,2420 | 39,3643 | 0,8600 | 40,2243 | | | | | |
| 1,3042 | 0,1351 | 0,4633 | 52,4857 | - 51,5097 | 1,1411 | 78,7285 | 0,8108 | + 79,0588 | 131,2142 | 0,6756 | - 130,5386 | 19089,4850 | 232,4322 | 19321,9172 | 87,4762 | 0,7722 | 88,2484 | | | | | |
| 1,3007 | 0,5135 | 0,5751 | 124,1287 | - 123,1896 | 1,5137 | 161,7434 | 1,3384 | + 161,9187 | 188,0737 | 0,7781 | - 187,2956 | 46642,2885 | 331,6752 | 46973,9637 | 144,3357 | 0,6687 | 145,0044 | | | | | |
| 1,1934 | 0,8217 | 0,5906 | 222,2988 | - 220,8743 | 1,8700 | 250,3786 | 1,8508 | + 250,3978 | 233,9987 | 0,8649 | - 233,2338 | 89157,8892 | 381,4320 | 89539,3212 | 207,7559 | 0,5520 | 208,3079 | | | | | |
| 0,9903 | 1,1912 | 0,5299 | 348,5269 | - 346,8753 | 2,1821 | 341,7038 | 2,3358 | + 341,5501 | 273,3630 | 0,9243 | - 273,4287 | 150542,0976 | 378,9666 | 150921,0642 | 278,8303 | 0,4239 | 279,2542 | | | | | |
| 0,7079 | 1,5808 | 0,3953 | 482,6278 | - 480,6344 | 2,4248 | 413,4561 | 2,7084 | + 413,2725 | 300,6993 | 0,9849 | - 299,7144 | 224540,3682 | 319,1250 | 224859,4932 | 350,9981 | 0,2875 | 351,2856 | | | | | |
| 0,3687 | 2,0007 | 0,2105 | 624,6891 | - 622,5308 | 2,5787 | 459,7966 | 2,9452 | + 459,4301 | 317,1011 | 1,0156 | - 316,0855 | 323233,1588 | 196,8912 | 323430,0500 | 430,8201 | 0,1452 | 430,9653 | | | | | |
| 0,0000 | 2,3854 | 0,0000 | 737,2709 | - 734,8855 | 2,6316 | 479,0195 | 3,0370 | + 478,6141 | 323,6618 | 1,0060 | - 322,6358 | 443674,7097 | 0,0000 | 443674,7097 | 508,4552 | 0,0000 | 508,4552 | | | | | |
| | | | | $A'_2 = - 811,9052$ | | | | | $B'_2 = + 720,0370$ | | | | | $B'_3 = - 613,0932$ | | | | | $D'_0 = + 391922,2492$ | | | $A'_3 = + 657,1972$ |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $D'_3 = 640,3255$ |

Подобнымъ же образомъ вычислены и интегралы B_3' , A_2' , A_3' , D_0' . Что же касается интеграла D_3' , то онъ полученъ непосредственнымъ интегрированиемъ, а именно:

$$D_3' = \int_0^{\frac{L}{2}} 12 \frac{ds}{e^3} = \frac{12}{e^3} \int_0^{\frac{L}{2}} ds = \frac{12}{e^3} \cdot \frac{L}{2} \quad \text{или}$$

$$D_3' = 12 \cdot 18,2242 \cdot 2,928 \approx 640,3255.$$

Подставляя значенія найденныхъ интеграловъ въ уравненія 164, получаемъ:

$$720,04 \cdot H_0 - 613,09 \cdot M_0 = 890684.$$

$$-613,09 \cdot H_0 + 640,33 \cdot M_0 = 747657,7$$

Откуда

$$H_0 = 1315 \text{ пуд. и } M_0 = 91,49 \text{ пуд. см.}$$

Изгибающій моментъ относительно центра тяжести замкового шва, согласно третьему равенству |160|.

$$M_3 = P \cdot p - V_0 \cdot \frac{L}{2} + H_0 \cdot y - M_0 \quad \text{или}$$

$$M_3 = 2028,78 - 1734 \cdot 2,325 + 1315 \cdot 1,48 - 91,49 =$$

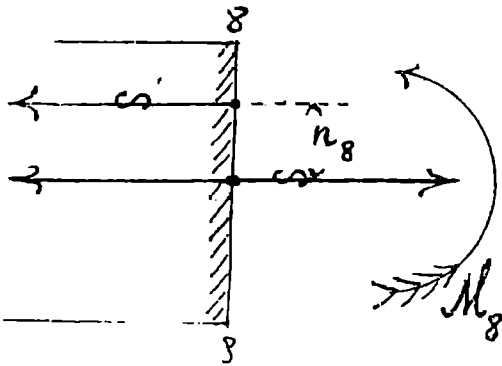
$$\approx -149,794 \text{ пуд. см.}$$

Эксцентриситетъ въ замкѣ

$$n_8 = \frac{M_8}{K} = - 0,114 \text{ саж.}$$

Величина n_8 должна быть отложена по направлению замкового шва |8 - 8| вверхъ отъ центра тяжести, что вполне поясняется [фиг. 89].

Фиг. 89.



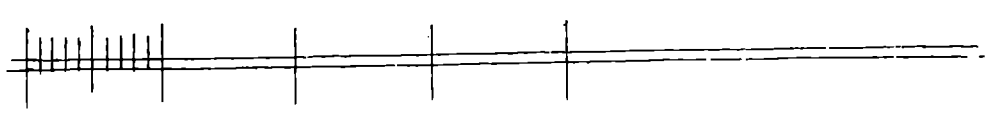
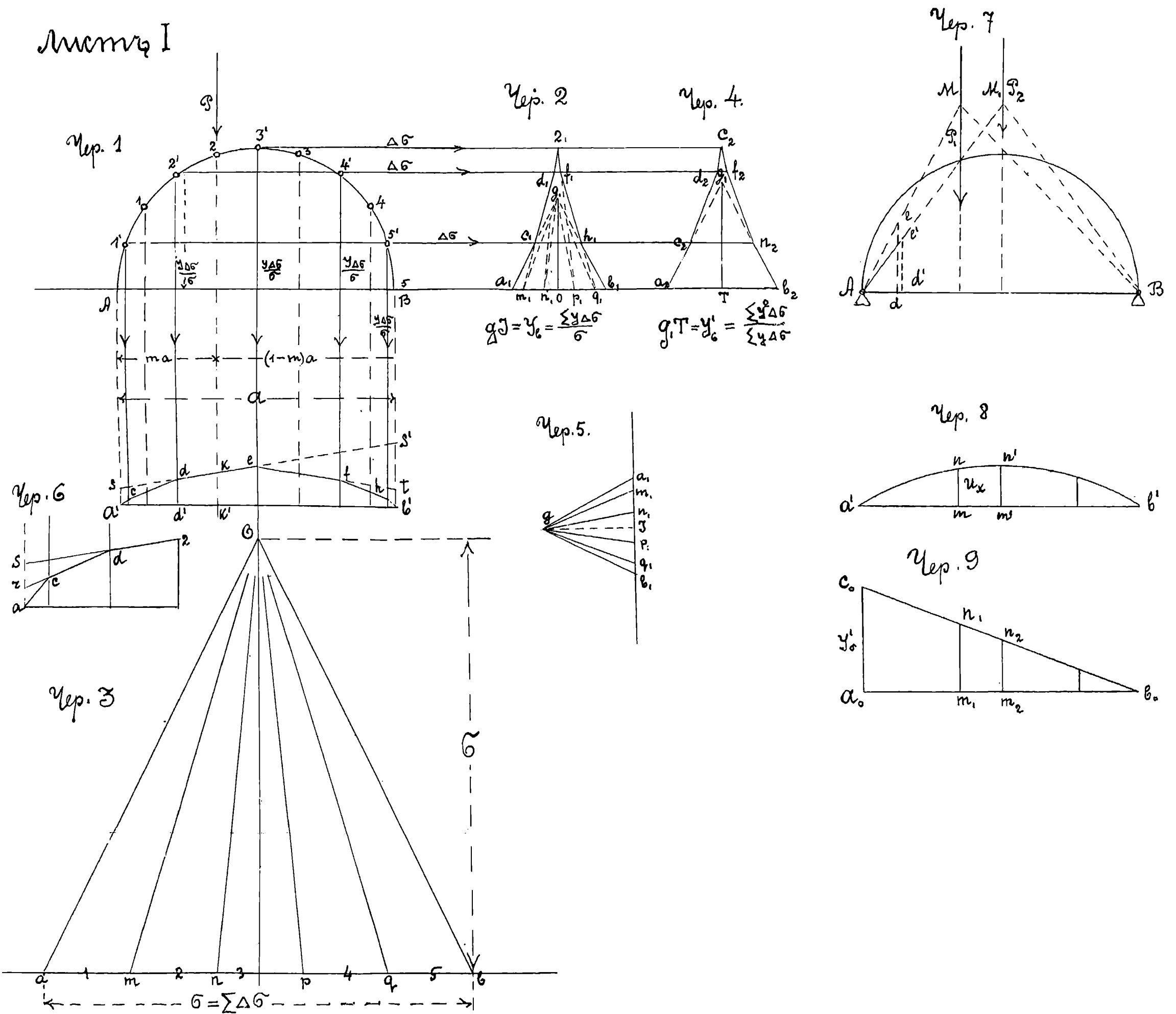
По найденнымъ величинамъ для n_8 и K_8 на черт. I листъ IV была построена кривая давленія въ аркѣ и произведена повѣрка прочности для замкового и пятого

го швовъ аналогично тому, какъ это было указано въ предыдущемъ примѣрѣ.

-----000000-----

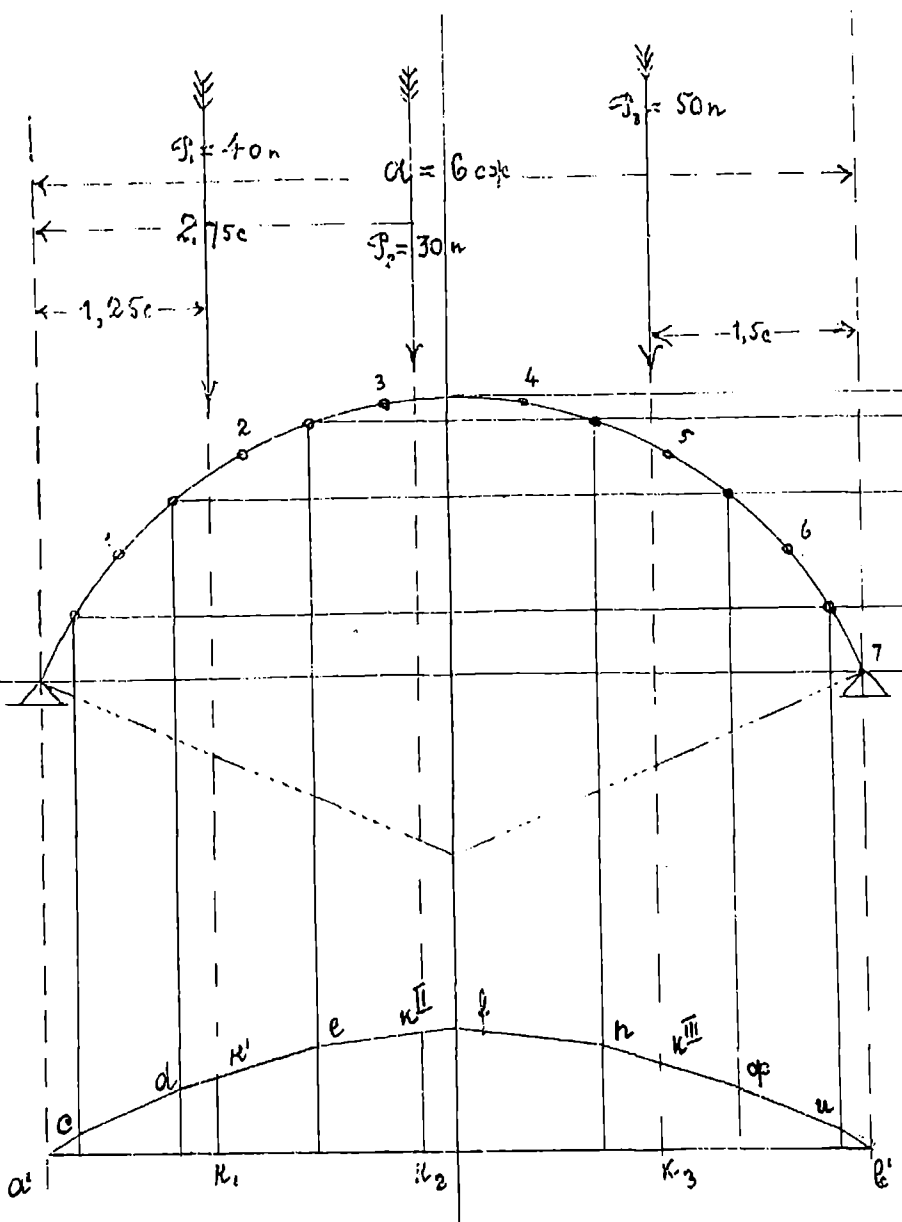
Продолженіе курса послѣдуетъ въ отдѣльномъ выпускѣ

Метод I

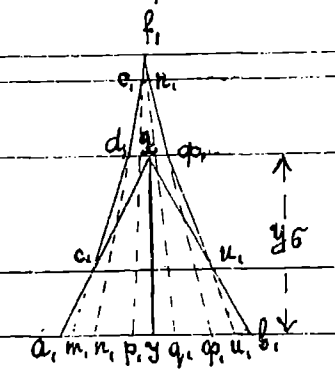


Метод II

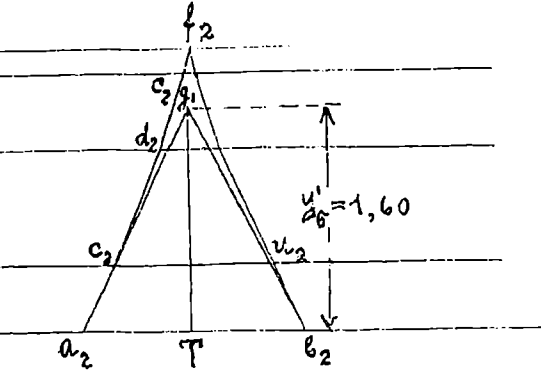
Чер. 1.



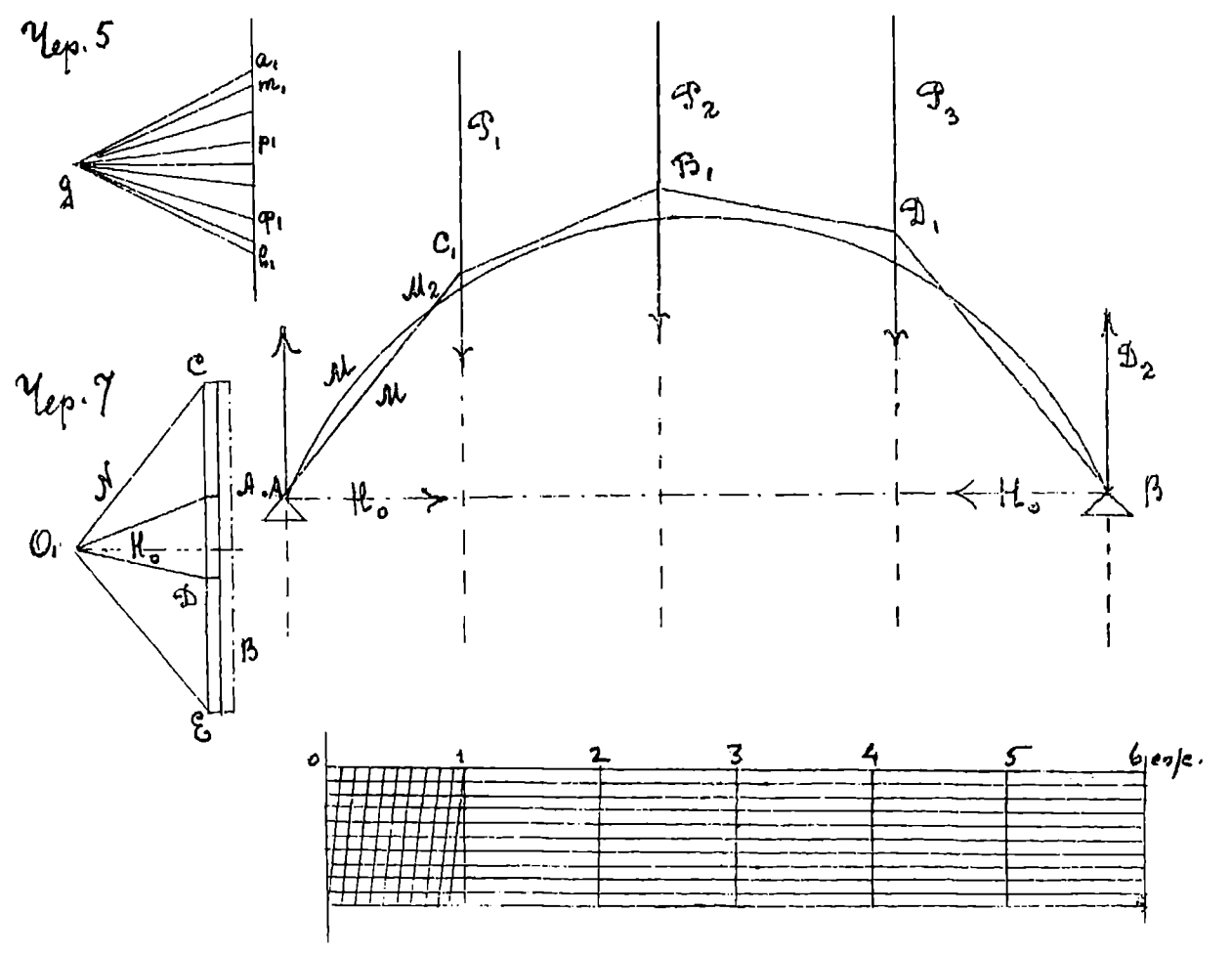
Чер. 3



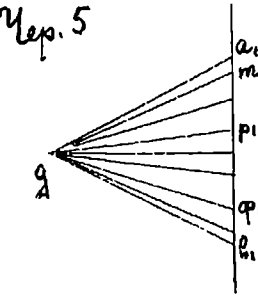
Чер. 4



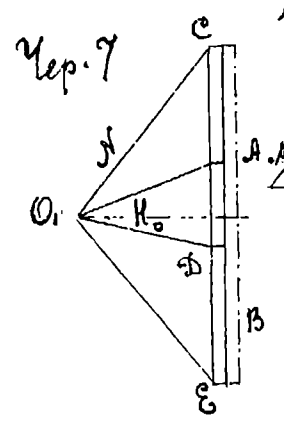
Чер. 8



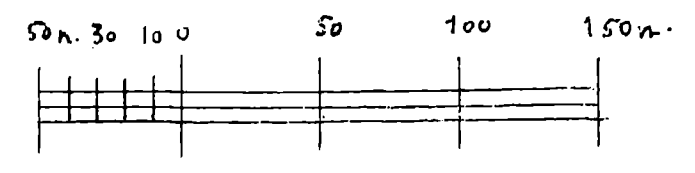
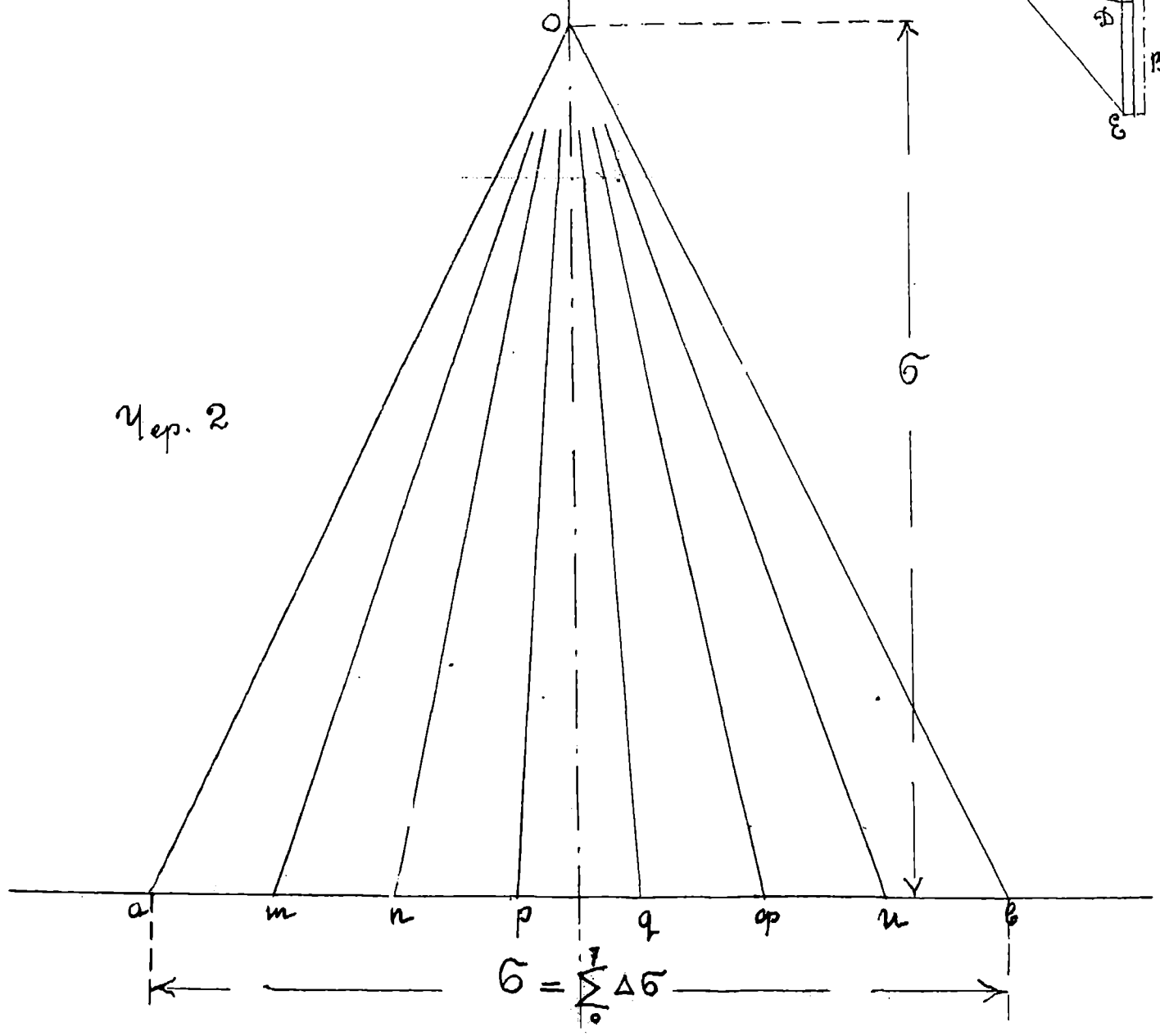
Чер. 5



Чер. 7

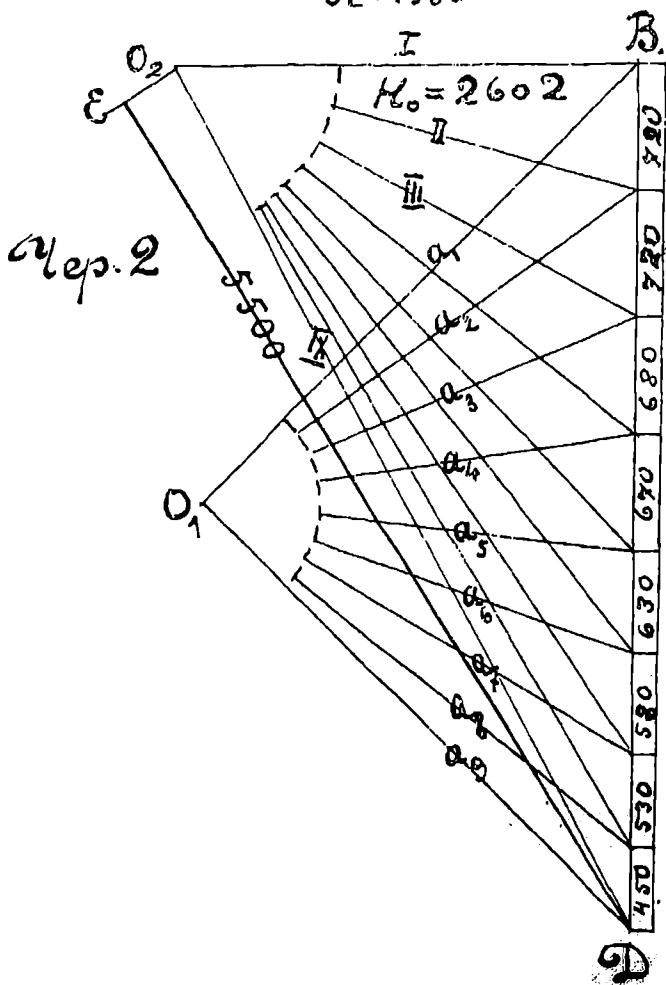
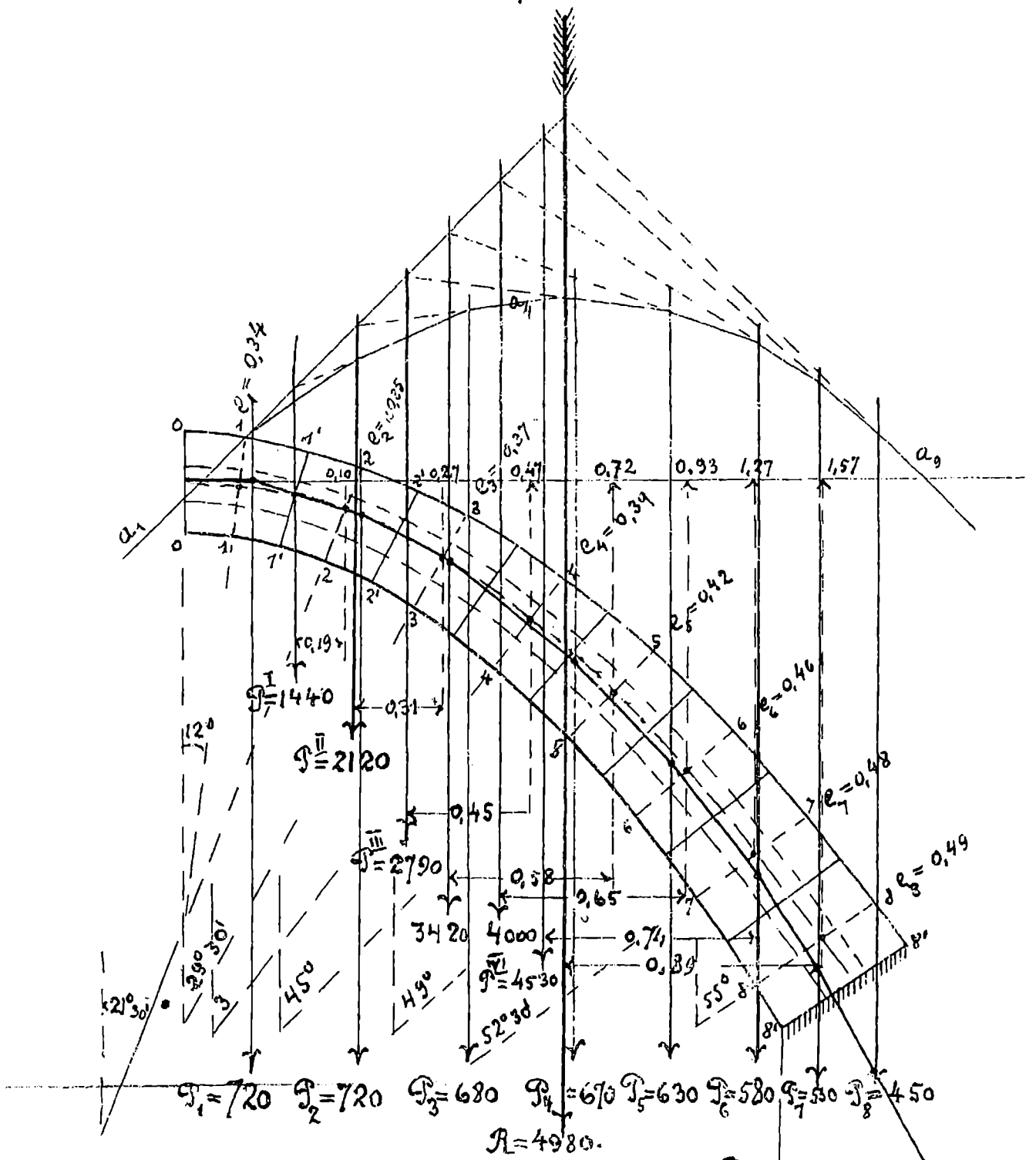


Чер. 2

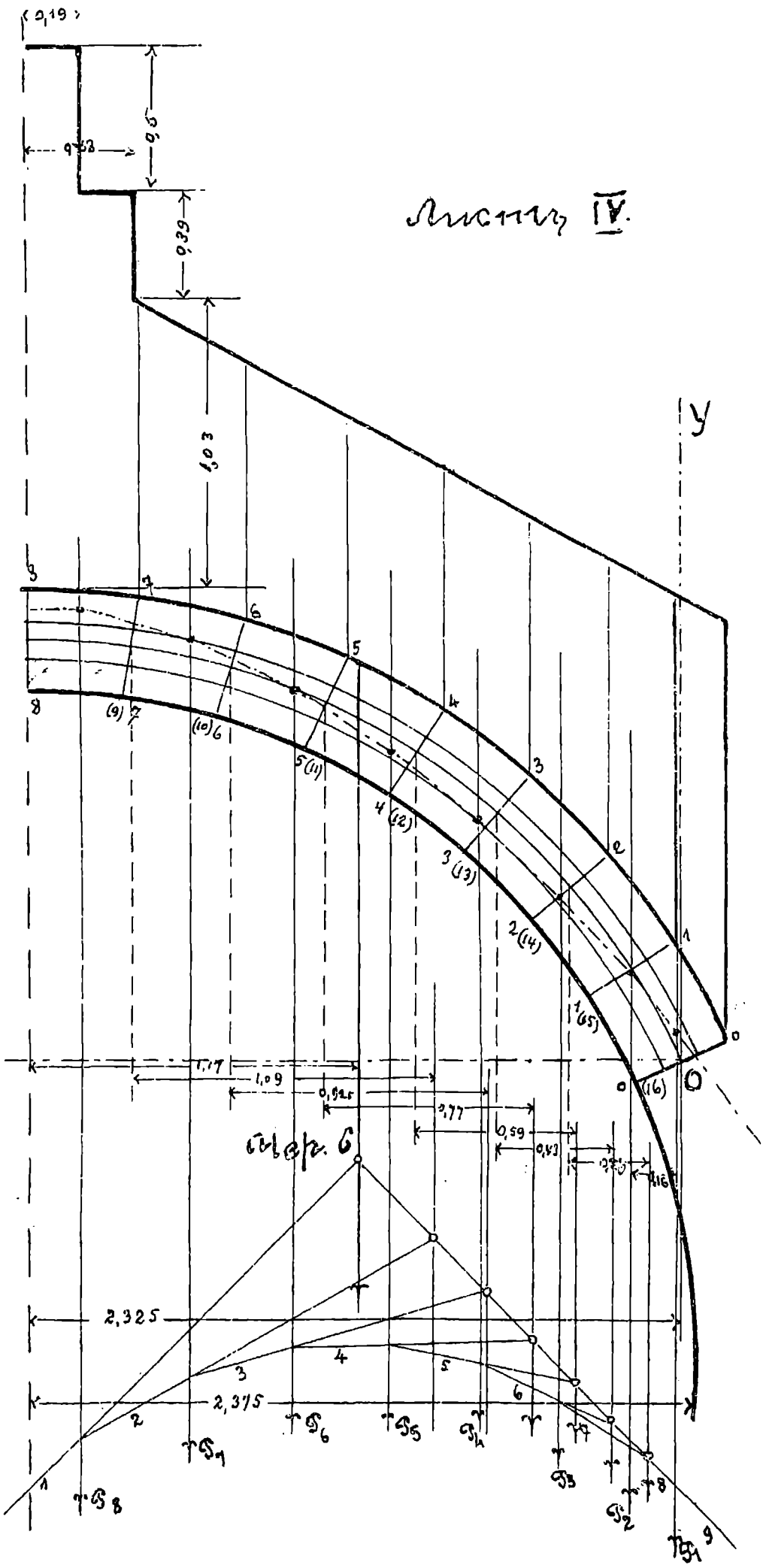


Лесной III

Чер. 1



Лист IV.



Map. 2

